UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

TARIFICACIÓN EN SEGUROS DE VIDA CON LA MEDIDA DE RIESGO ESPERANZA DISTORSIONADA

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA POR

Montserrat Hernández Solís

Bajo la dirección de los doctores

Cristina Lozano Colomer
José Luis Vilar Zanón

Madrid, 2013

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

TESIS DOCTORAL

Tarificación en seguros de vida con la medida de riesgo Esperanza Distorsionada

Autor: Montserrat Hernández Solís (UNED)

Directores: Dra. Cristina Lozano Colomer (ICADE) y Dr. Jose Luis Vilar Zanón (UCM)

Somosaguas 2012

Madrid

AGRADECIMIENTOS

Quiero comenzar estas líneas mostrando mi más profundo y sincero agradecimiento a mis dos directores de tesis, Dra. Cristina Lozano Colomer, del departamento de Métodos Cuantitativos de Icade y Dr. Jose Luis Vilar Zanón, del departamento de Economía Financiera y Actuarial de la UCM. Sin ellos este trabajo de investigación no habría visto nunca la luz. En especial quiero agradecer a Cristina Lozano todo el esfuerzo que ha hecho estudiando conmigo cada tema que abordábamos, el apoyo que me ha proporcionado en los momentos duros, que los ha habido en demasía, así como en los momentos de flaqueza durante la realización del trabajo.

A mis compañeros del departamento de Economía de la Empresa y Contabilidad de la Facultad de Económicas de la Uned, porque han estado animándome en todo momento. Al Dr. Damian de la Fuente, compañero del equipo docente del que formo parte y director del departamento, por haberme liberado de trabajo para que me centrara en la tesis. Especialmente quiero dar las gracias a la Dra. Teresa Herrador Alcaide, compañera y amiga, por todo el esfuerzo que ha hecho en la fase final de la tesis, trabajando codo con codo conmigo para que dicha tesis pudiera ser leída lo antes posible.

Finalmente dedico este trabajo a mis padres, que han estado durante años esperando pacientemente el momento de verme convertida en doctora.

A todos ellos gracias.

INDICE

INDICE DE TABLAS

INDICE DE GRÁFICOS

INDICE DE MAPAS CONCEPTUALES

Introducción

El riesgo asociado a eventos aleatorios representa el factor más importante dentro del entorno asegurador, tanto en el ramo de vida como en el de no vida. El seguro es una medida de prevención de un acontecimiento incierto, que en el caso de los seguros de vida se sabe que se producirá pero no se sabe cuando acaecerá. Como en la vida no siempre es factible evitar los riesgos, cuando éstos se producen suele conllevar una pérdida de los ingresos o de los ahorros. Es por esta razón por lo que surge la cuantificación del riesgo y su aseguramiento. Ante la situación que se está viviendo en los últimos años, las entidades aseguradoras tienen como una de sus prioridades saber cuantificar los riesgos que les afectan de una manera correcta y con las técnicas estadísticas-matemáticas apropiadas, para así conseguir que su nivel de recursos propios sea acorde con el ejercicio de su actividad. Llevan a cabo análisis periódicos de su capacidad financiera (solvencia) para poder hacer frente a los riesgos a los que se enfrentarán. Y es precisamente en esta idea de ajuste en la que se sustenta una directiva que afecta a los países de la UE: Solvencia II, cuyo objetivo es lograr una mejor defensa de los asegurados europeos a través de una adecuada evaluación del riesgo, esto es, sabiendo identificar las causas que pueden ocasionar pérdidas a las entidades aseguradoras, así como la correcta medición del mismo.

El origen de Solvencia II se sitúa en el año 2001 con los informes elaborados por la empresa KPMG y por la conferencia de las actividades supervisoras de los estados miembros de la UE. En dichos informes se han establecido las bases para el desarrollo de las tres cuestiones básicas de Solvencia II:

- La fijación de los tres pilares básicos en los que se sustenta la directiva comunitaria, similares a Basilea II para entidades de crédito;
- La especificación de los problemas de solvencia a los que se enfrentan las compañías de seguros, así como la anticipación a los mismos; y
- El establecimiento de los requerimientos cuantitativos de capital para hacer frente a los riesgos de las compañías, para de este modo poderlos supervisar.

Los informes técnicos desarrollados hasta la fecha, que son el desarrollo de Solvencia II, se denomina QIS. Éste cuenta con diferentes capítulos (QIS1, QIS2, QIS3, QIS4 y QIS5), siendo el sexto el que actualmente está en proceso de elaboración.

A nivel de normas, Solvencia II se estructura en cuatro niveles:

- Primer nivel: Comprende las directivas básicas y reglamentos del parlamento europeo y del consejo. La anterior directiva se encuentra incluida en este nivel.
- Segundo nivel: Se incluyen las directivas y el reglamento de la comisión.
- Tercer nivel: Se incluye el comité científico, que establece las guías y recomendaciones de carácter no obligatorias.
- Cuarto nivel: Se encuentra la comisión europea, que es la que realiza el seguimiento y vigilancia de la aplicación de la normativa comunitaria por los estados miembros.

Solvencia II está trabajando en la Directiva D.2009/138/CE, una directiva marco que estudia medidas a desarrollar, encuadradas en el segundo nivel. El objetivo que pretende es conseguir, con un nivel de significación del 5% y un horizonte temporal de un año, que las entidades de seguros dispongan de los recursos propios suficientes para poder hacer frente a los riesgos asumidos.

Uno de los aspectos clave a desarrollar por Solvencia II son los tres pilares en los que se sustenta:

- En el primer pilar se lleva a cabo el establecimiento y puesta a disposición de las entidades aseguradoras de mecanismos que les sirvan de ayuda para controlar y calcular el nivel de fondos propios que deben de tener para poder afrontar los niveles de riesgo asumidos.
- El pilar segundo se centra en la entidad supervisora. En este caso será dicha entidad la que ha de contar con mecanismos precisos que le permitan controlar la situación financiera de las entidades

aseguradoras, así como conseguir el nivel de ajuste óptimo entre los niveles de fondos propios exigibles y los niveles de riesgo asumidos.

- El último pilar pretende mostrar una imagen de transparencia al mercado por parte de las entidades aseguradoras de toda la información de la que dispongan para la toma de decisiones. Dicho de otro modo, en este último pilar se establecen los requisitos para que se pueda llevar a cabo la comparación de capitales entre entidades de seguros.

Con el establecimiento de los tres pilares en los que se sustenta Solvencia II se persigue un triple objetivo. Por un lado conseguir fomentar, así como mejorar la integración del mercado único europeo de seguros; intentar además que el sector sea competitivo, así como lograr la convergencia y la supervisión entre los supervisores.

Mapa conceptual 1: Solvencia II

Informe KPMG
+
Informe Supervisora UE

SOLVENCIA II

CUESTIONES:

- Pilares básicos D.C.
- Determinación problemas solvencia
- Requerimientos cuantitativos de capital

Niveles Solvencia II

I. Directivas básicas y reglamentos Parlamento Europeo.
II. Directivas y reglamento de la Comisión.
III. Comité Científico (Guías + normas no obligatorias).
IV. Seguimiento y vigilancia de la Comisión Europea.

Pilares

- Primero: Mecanismos de control y cálculo de nivel de fondos.
- Segundo: Entidad supervisora.
- Tercero: Imagen de transparencia por las aseguradoras.

Triple Objetivo:

1. Integración mercado único europeo de seguros.
2. Fomentar un sector seguro.
3. Convergencia y supervisión de supervisores.

Por todos los razonamientos anteriores, se puede afirmar que una entidad aseguradora no presentaría problemas de solvencia para el pago de las prestaciones cubiertas en las pólizas, ni tampoco presentaría pérdidas, si no se produjeran desviaciones desfavorables de la siniestralidad real con respecto a la esperada. Como en la realidad dichas desviaciones se producen, Solvencia II, en el informe técnico QIS5, establece y fija determinados niveles de capital exigibles a las aseguradoras para el ramo de vida, así como el incremento o decremento que ha de experimentar el tanto instantáneo de mortalidad en el ramo de vida, trabajo al que se orienta esta tesis, para evitar dichas desviaciones (definidos en el epígrafe 1.1), en concreto para el seguro con cobertura de fallecimiento y para el seguro con cobertura de supervivencia.

De este modo, la directiva comunitaria propone unos niveles de capital para justificar la práctica habitual que realizan las entidades de seguro de modificar dichos tantos instantáneos de mortalidad para así poder hacer frente a esas desviaciones de las que se ha hablado al inicio del párrafo anterior, obteniendo de este modo unas primas de riesgo recargadas que son superiores a las primas sin recargar. En la actualidad, y según los datos facilitados por Eurostat, 2011, la esperanza de vida tiene un comportamiento creciente, siendo superior en las mujeres (85 años en mujeres frente a los 79 años de los hombres en el año 2009, último año disponible en cifras). El efecto que este fenómeno tiene en la solvencia de la compañía de seguros es que ésta ha de estimar de manera correcta las provisiones técnicas para no quedarse corta en el posterior abono de las prestaciones cubiertas en la póliza. Pero para cuantificar el riesgo en el ramo de vida es preciso tener en cuenta otras variables, como puede ser el reaseguro cedido (el riesgo a analizar es el riesgo de contrapartida, en el caso de que el reasegurador no pague) y el tipo de interés técnico al que se descuentan los flujos para calcular los valores actualizados actuariales anteriormente nombrados.

La cuantificación del riesgo viene determinada por la prima a cobrar al tomador, y por lo tanto, cuanto mayor sea el riesgo mayor será la prima que cobre la compañía aseguradora. Es por este motivo por el que, en toda póliza, el riesgo asumido por la entidad aseguradora ha de definirse de manera clara. Para el ramo de vida el riesgo consiste en el fallecimiento del asegurado (seguros de decesos) o en la supervivencia del mismo (seguros de supervivencia), pero en cualquiera de los dos casos el evento que representa el pago de la prestación por parte de la compañía de seguros ha de ser accidental, fortuito o ajeno a la voluntad del asegurado, teniéndose además en cuenta que el volumen de la pérdida ha de ser significativo desde la perspectiva del asegurado. Dicha prestación representa el capital o capitales garantizados por la compañía en el momento del acaecimiento del evento cubierto en la póliza, pagadero al asegurado o al beneficiario en su caso, mientras que la contraprestación representa la prima única o periódica que la aseguradora cobra al tomador de la póliza por admitir que éste le transfiera su riesgo.

1.1 Objetivo de la tesis

El objetivo de esta tesis es obtener un principio de cálculo de primas, para el ramo de vida, basado en una medida de riesgo coherente, que justifique la recomendación de Solvencia II de incrementar o disminuir, según la modalidad de seguro elegida, los tantos instantáneos de mortalidad y conseguir de este modo una prima recargada para hacer frente a las desviaciones de siniestralidad.

Para ello se comienza definiendo el concepto de tarificación. La tarificación es la actividad que tiene por finalidad determinar la prima que se aplica para valorar los diferentes riesgos que cubre una compañía de seguros, habiéndose realizado previamente todos los cálculos necesarios, tanto actuariales como estadísticos. En este trabajo se han seleccionado determinadas modalidades de seguro del ramo de vida, en concreto el seguro vida entera y el seguro de rentas vitalicio.

Se demuestra que el método de tarificación basado en la esperanza distorsionada, en forma de potencia, es consistente con la práctica de añadir un margen de seguridad a las probabilidades de fallecimiento o de supervivencia, dependiendo de la modalidad de seguro que se trate. De esta forma se justifica, a partir de un principio de cálculo de prima, basado en una medida de riesgo coherente, una práctica habitual en la tarificación en el ramo de vida.

La prima basada en la esperanza matemática presenta riesgo de insolvencia, aunque se base en buenas estimaciones, derivado de las fluctuaciones de la siniestralidad. Para protegerse de este riesgo las compañías pueden recargar las primas de dos maneras, o bien explícitamente (añadiendo una cuantía directamente a la prima) o bien de manera implícita (las primas lleven el recargo incorporado dentro de su sistema de cálculo), obteniéndose así las primas recargadas. Y lo que hacen es fijar un recargo técnico o de seguridad que proporcione estabilidad a la empresa aseguradora, pudiendo ser, o bien explícito o bien venir recogido de forma implícita en las bases de cálculo, mediante correcciones o modificaciones en las tablas de mortalidad. La diferencia entre la prima recargada y la prima sin recargar es lo que se conoce con el nombre de recargo.

En los seguros de vida con cobertura de fallecimiento una experiencia de siniestralidad adversa significa que los asegurados fallecen antes de lo esperado. Así, cuando se calculan las primas, es una práctica común añadir un margen de seguridad implícito, en forma de porcentaje, a las probabilidades de fallecimiento q_x, o bien emplear una tabla de mortalidad cuyas probabilidades de fallecimiento sean superiores a las del grupo humano considerado. Esto se puede interpretar como un incremento del tanto instantáneo con un múltiplo. En el caso de los seguros de supervivencia la situación es la inversa. Una experiencia de siniestralidad adversa supone que los asegurados viven más tiempo de lo esperado. En este caso las compañías de seguro toman tablas de mortalidad desfasadas, con probabilidades de fallecimiento inferiores y por tanto con una disminución del tanto instantáneo de mortalidad. Se demuestra en esta tesis que la modificación del tanto se refleja en el hecho que dicho tanto instantáneo de mortalidad es multiplicado por el cociente $\frac{1}{\rho}$, teniendo el parámetro ρ la interpretación de aversión al riesgo del partícipe (Yiu-Kuen Tse (2009)).

Como se indica en el QIS5 Technical Specifications (Working Document of the Commission services, European Commission, (2010)), en los seguros de vida, el recargo de seguridad no suele formularse de forma explícita, pero existe de forma implícita de la siguiente manera:

-En los seguros para caso de muerte, cuando las probabilidades de fallecimiento estimadas con la tabla de mortalidad empleada son mayores que las reales del grupo humano considerado. De este modo se produce un incremento en el tanto instantáneo de mortalidad. SOLVENCIA II recomienda un capital a la compañía aseguradora, para hacer frente a las desviaciones desfavorables que puedan surgir, que se obtenga de incrementar dicho tanto en un 15%, de un modo permanente y para todas las edades y pólizas que comprenden la cartera. De este modo la liquidez y solvencia de la entidad se encontrarán garantizadas.

-En los seguros de supervivencia, cuando las probabilidades de supervivencia estimadas con las tablas de mortalidad son superiores a las reales. De este modo se produce un decremento en el tanto instantáneo de mortalidad, lo que se traduce en que los asegurados sobreviven durante un tiempo superior al estimado por la compañía. Esto ocurre cuando en la práctica se toma tablas de mortalidad desfasadas. SOLVENCIA II recomienda en este caso y para hacer frente a las posibles desviaciones que puedan surgir, un capital que se obtenga de decrementar dicho tanto en un 20%, de un modo permanente y para todas las edades y pólizas que comprenden la cartera. De este modo la liquidez y solvencia del a entidad se encontrarán garantizadas.

En 1995 Wang, en su artículo de la revista Insurance, Mathematics & Economics, titulado "Insurance pricing and increased limits by proportional hazards transforms", ya propone un principio de cálculo de prima recargada para seguros del ramo no vida, a partir de la medida de riesgo coherente (Artzner, P (1999)), la llamada esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en su forma de potencia, (transformada proporcional del tanto instantáneo[1]), teniendo la función de distorsión la forma $g(u) = u^{\frac{1}{\rho}}$, siendo condición necesaria para que dicha medida de riesgo sea coherente que el parámetro $\rho \geq 1$.

Se sigue la línea de investigación abierta por Wang, dado que se propone un principio de cálculo de prima, la esperanza distorsionada con la función de distorsión transformada proporcional del tanto instantáneo, pero aplicado al ramo de vida. Se demuestra que el empleo de este principio de cálculo de primas produce el mismo efecto de aumento o disminución del tanto instantáneo que utilizar una tabla de mortalidad con probabilidades de fallecimiento superiores o inferiores según el tipo de seguro. Por tanto en este trabajo se proporciona una justificación, a partir de una medida de riesgo coherente, a una práctica habitual existente en el ramo de vida.

Perseguimos un doble objetivo: una expresión para la prima recargada que esté basada en la esperanza distorsionada en forma de potencia para la modalidad de seguro de fallecimiento (vida entera) y modalidad de seguro de supervivencia (seguro de rentas vitalicio). Para el seguro con cobertura de supervivencia el valor del parámetro ha de ser $\rho \geq 1$, mientras que para el seguro con cobertura de fallecimiento es necesario que el valor del parámetro sea $\rho \leq 1$. En este último caso se demuestra, aportándose como novedad en esta tesis, que la medida de riesgo definida para

[1] **Denominada "Proportional Hazards Transforms" (PH)**

calcular la prima verifica los axiomas de medida de riesgo coherente, por lo que este estudio supone una extensión del de Wang (en su artículo titulado "Insurance pricing and increased limits by proportional hazards transforms" (1995)).

Tomando en consideración las indicaciones que hace SOLVENCIA II a las compañías de seguro en el QIS5, el valor que deberá tomar el parámetro ρ para los seguros con cobertura de fallecimiento será $\rho = 0.15 < 1$, mientras que para los seguros de supervivencia será de $\rho = 1.20 > 1$. En esta tesis se ha ampliado el campo de variación numérico de dicho parámetro en las dos modalidades de seguro para poder llevar a cabo una comparación, tanto numérica como gráfica, entre la prima de riesgo recargada y la prima de riesgo neta o sin recargar, y de este modo extraer conclusiones.

En ambos casos se demuestra que no se modifica el modelo de ley de supervivencia, lo único que cambia es el valor del tanto instantáneo.

Para lograr el doble objetivo anteriormente definido, se empieza definiendo el principio de cálculo de prima basado en la función de distorsión de Wang, para después tomar un caso particular de función de distorsión en forma de potencia, que proporciona un principio de cálculo de prima basado en una medida de riesgo coherente. Se aplica a las dos modalidades de seguro anteriormente nombradas.

1.2 Metodología utilizada

La práctica habitual de cálculo de la prima única es tomar el principio de la esperanza matemática. En esta tesis se presenta una prima única recargada implícitamente para las dos modalidades de seguro indicadas, basada en la modificación de la función de supervivencia. A esta prima se la llama esperanza distorsionada y a la función de supervivencia transformada se la llama función de supervivencia ajustada al riesgo, debido a que es la que permite obtener primas únicas de riesgo recargadas.

Como se ha comentado con anterioridad, esta forma de obtener la prima recargada a través de una función de distorsión en forma de potencia ha sido ya utilizada en el ramo de no vida (Wang, (1996)), para valores del parámetro $\rho \geq 1$. En este trabajo se aplica al ramo de vida para valores del parámetro $\rho \geq 0$. Se razonan los valores que ha de tomar el parámetro ρ aplicado a las dos modalidades de seguros de vida seleccionadas. Se obtiene que la prima recargada obtenida es una función creciente de ρ, para los valores de $\rho \geq 1$, y decreciente con ρ, para los valores de $\rho \leq 1$. Por esta razón dicho parámetro puede considerarse como un parámetro de aversión al riesgo, tal como se ha comentado anteriormente.

1.3 Resultados obtenidos

Se obtiene un principio de cálculo de prima para seguros de vida, basado en la función de distorsión de Wang en su forma de potencia y se aplica a la modalidad de seguro de decesos (vida entera) y a la modalidad de seguro de supervivencia (seguro de rentas). Esta prima obtenida es una prima recargada implícitamente que refleja una siniestralidad superior a la esperada. Dicha prima está basada en una medida de riesgo coherente.

Mediante la utilización de la función de distorsión en forma de potencia no se va a modificar el modelo de ley de supervivencia. Únicamente se va a modificar el valor del tanto instantáneo, siendo éste último proporcional al tanto instantáneo de la ley de supervivencia sin distorsionar, y siendo el factor de proporcionalidad el cociente $\frac{1}{\rho}$. Con este parámetro ρ se justifica, a través de una medida de riesgo coherente, la práctica habitual en el ramo de vida de recargar el tanto instantáneo.

Se aplica este principio de cálculo de prima en un primer momento a nivel general, para posteriormente ejemplificarlo a las leyes de supervivencia de Dormoy (primera y segunda), Gompertz y Makeham.

A lo largo de los capítulos cuarto y quinto se va demostrar que la prima recargada para todas y cada una de las leyes de supervivencia empleadas y para las dos modalidades de seguro seleccionadas para el estudio es la misma que se obtiene a partir de otra variable aleatoria, que sigue la misma ley de supervivencia, modificándose única y exclusivamente los parámetros de las leyes. Al trabajar con la modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento, el exponente de la función de distorsión, que es el factor de proporcionalidad ya definido, ha de ser mayor que uno, para que de este modo la medida de riesgo esperanza distorsionada sea una medida de riesgo coherente por verificarse así los axiomas de coherencia. Se demuestra en el capítulo cuarto la propiedad de subaditividad para los valores concretos que toma el parámetro ρ para esta modalidad de seguro, realizándose dicha demostración del mismo modo que hizo Wang (1995) para valores del factor de proporcionalidad menor que uno (siendo estos valores los que se aplican a un seguro con cobertura de supervivencia). De este modo se conseguirá obtener una prima de riesgo recargada mayor que la prima neta, teniendo la prima única de riesgo recargada y el factor de proporcionalidad una relación creciente. Al trabajar con la modalidad de seguro con cobertura de supervivencia, el factor de proporcionalidad ha de ser menor que uno, para que de este modo la esperanza distorsionada sea una medida de riesgo coherente por verificarse así los axiomas de coherencia (ya demostrado por Wang para valores de $\rho \geq 1$). De este modo el riesgo de longevidad será mayor al considerar la función de distorsión en forma de potencia, obteniéndose así una prima única de riesgo recargada mayor que la prima neta. La relación que tendrá la prima única de riesgo recargada y el factor de proporcionalidad será en este caso decreciente.

Es importante señalar que todos los cálculos numéricos realizados y mostrados en el apéndice cuarto para la obtención de la prima única de riesgo, tanto para un seguro vida entera como para un seguro de rentas, mediante la aplicación de las diferentes leyes de supervivencia es otra de las aportaciones de esta tesis, dado que dichos cálculos pensamos que no han sido realizados por nadie hasta la fecha, puesto que la medida de riesgo denominada esperanza distorsionada nunca hasta este trabajo se ha aplicado al ramo de vida.

Organización del trabajo de investigación

Comienza el capítulo segundo definiéndose lo que es una medida de riesgo, los tipos de medidas de riesgo y propiedades deseables, así como la relación entre una medida de riesgo y el cálculo de primas. Posteriormente se explica el criterio que se ha seguido para seleccionar la más adecuada para este estudio, que es una medida de riesgo basada en los principios de cálculo de primas.

A nivel general, las medidas de riesgo han de cumplir una serie de propiedades que son consideradas como deseables. Así lo han establecido determinados autores como Gerber, Heilmann o Young. Y dentro de la categoría de propiedades deseables Artzner (1999), en su artículo titulado "Coherent measures of risk", ha establecido una selección de las que se deben de verificar para que una media de riesgo sea considerada coherente.

De las propiedades para que una medida de riesgo sea coherente se ha hablado mucho en la literatura especializada, y todos los autores han coincidido siempre en las mismas, las cuales están explicadas en el capítulo segundo.

En el tercer capítulo se estudian los principios de cálculo de primas, así como su interpretación como medidas de riesgo. Autores como Sarabia y Deniz (2008) o Tse (2009) enumeran una serie de principios, aplicados la mayor parte de ellos al ramo de no vida de los seguros, a excepción del primero de ellos, el principio del valor esperado, que es el que se aplica en el ramo de vida asegurador.

De entre todos los principios de cálculo de primas existentes, tales como el principio de la prima neta, el principio del valor esperado, el principio de la varianza, el principio de la desviación típica, el principio de la prima exponencial, el principio de la prima Esscher o el principio de la función de distorsión, se realiza un estudio para analizar que propiedades son las que cumplen y las que no cada uno de ellos, para saber de entre todos cual o cuales constituyen una medida de riesgo coherente.

Se finaliza este tercer capítulo ahondando en el último principio, el basado en la función de distorsión, foco de atención de esta tesis, dado que el objetivo que se pretende conseguir es emplear la función de distorsión para obtener una prima única de riesgo recargada implícitamente en el ramo de vida, siendo esta función una transformación de la función de supervivencia de la variable aleatoria "vida residual". Y en concreto se aplica la función de distorsión en su forma de potencia, tanto para un seguro con cobertura de supervivencia como para un seguro con cobertura de fallecimiento.

Se analizan los motivos por los cuales se ha seleccionado la función de distorsión de Wang en su forma de potencia, estudiando el modo en que se obtiene la prima recargada de manera implícita, la llamada prima ajustada al riesgo. Este recargo implícito es el que permite hacer frente a la desviación de la siniestralidad real con respecto a la esperada, proporcionando una prima recargada que se demuestra es igual a la prima pura de una nueva variable aleatoria "vida residual", cuya función de supervivencia posee un tanto instantáneo o fuerza de mortalidad proporcional a la de la variable inicial que se corresponde con la prima pura.

En el capítulo cuarto se estudia un seguro de decesos (vida entera) a prima única en el campo continuo. En la primera parte del capítulo se toma como principio de cálculo de prima el principio de la prima neta, obteniéndose una prima pura sin recargo, tanto a nivel general como para cada una de las leyes de supervivencia seleccionadas.

En la segunda parte del capítulo se aplica el principio de la esperanza distorsionada en su forma de potencia. En este caso se obtiene una prima recargada con recargo implícito, la cual se compara con la prima sin recargar. Se comienza con el planteamiento general para posteriormente aplicarlo a los casos particulares de leyes de supervivencia anteriormente enumeradas.

Se comprueba que esta prima recargada es la misma prima pura sin recargo obtenida a partir de una nueva ley de supervivencia con un tanto instantáneo proporcional y superior al de la ley de supervivencia original. . Como se estudiará al final de este trabajo, en el capítulo correspondiente a las conclusiones, al verificarse la proporcionalidad a nivel general, también se verificará para todas y cada una de las leyes de supervivencia anteriormente descritas y explicadas en el apéndice tercero.

Esto permite obtener una justificación teórica a la práctica habitual que se lleva a cabo en las compañías aseguradoras de recargar los tantos instantáneos tomando tablas de mortalidad con probabilidades de fallecimiento superiores a las reales del colectivo considerado.

El objetivo es encontrar una prima recargada, estudiando en cada caso y para cada una de las leyes enumeradas, el efecto que tiene el exponente de la función de distorsión, cuyo parámetro ρ tiene la consideración de parámetro de aversión al riesgo (Tse, (2009)), así como el valor que ha de tomar dicho parámetro.

Del mismo modo que se hace en el capítulo cuarto para un seguro con cobertura de decesos, se va a expresar, a lo largo del capítulo quinto la prima única de riesgo para una modalidad de seguro con cobertura de supervivencia, el de rentas vitalicio. En la primera parte del capítulo se calcula la prima única de riesgo a partir del principio clásico (el basado en las esperanzas matemáticas), realizándose de manera análoga a como se hace en el capítulo anterior.

En la segunda parte del capítulo se va a calcular la prima única de riesgo recargada implícitamente, a partir de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia. Se comienza con el planteamiento general de la prima, para después proceder a la especificación con cada una de las leyes de supervivencia anteriormente empleadas en el capítulo cuarto. Y del mismo modo que se ha estudiado en el capítulo anterior la proporcionalidad del exponente de la función de distorsión $\frac{1}{\rho}$ respecto del tanto instantáneo de mortalidad a nivel general para un seguro vida entera, se realiza lo mismo para esta modalidad de seguro, verificándose de nuevo la proporcionalidad.

El sexto y último capítulo de esta tesis se centra en los resultados obtenidos y conclusiones por realizar una aplicación al ramo de vida que hasta ahora se había hecho en exclusiva al ramo de los seguros generales (no vida).

Estas conclusiones hacen referencia, fundamentalmente, al efecto que tiene el parámetro de proporcionalidad $\frac{1}{\rho}$ sobre las primas puras de riesgo recargadas a partir del empleo de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia. Y estas conclusiones se muestran y se analizan para las dos modalidades de seguro de vida seleccionadas para este trabajo.

Para terminar se adjuntan cuatro apéndices. En el apéndice 1 se presenta y se lleva a cabo un estudio base de las modalidades de seguros de vida que se utilizan en esta tesis (vida entera y rentas vitalicio). En el apéndice 2 se define la prima pura y se establece el principio de equivalencia actuarial en campo continuo para el cálculo de la prima, especificando los dos subprocesos que lo forman (tanto el de la prestación como el de la contraprestación). En el apéndice 3 se estudian las leyes de supervivencia con aplicación en el área de vida, las cuales serán las que se apliquen en los capítulos cuarto y quinto para el cálculo de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia. En el apéndice cuarto y último se muestran los cálculos numéricos que han sido precisos realizar para la obtención de la prima única de riesgo a partir de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, para las dos modalidades de seguro elegidas y para las diferentes leyes de supervivencia.

Capítulo Segundo. Medidas de Riesgo

2.1 Riesgos en una compañía aseguradora del ramo de vida

En toda empresa existen riesgos que pueden hacer peligrar su situación económica y llevarla, incluso a la quiebra. La palabra riesgo va unida al azar, a la incertidumbre, luego por lo tanto está relacionado con la aleatoriedad en cuanto a su acaecimiento y la cuantía de la pérdida. Se puede definir como la incertidumbre que existe de que un evento se produzca, en un determinado momento y bajo unas condiciones concretas, originándose por ello unas pérdidas cuantificables.

Es preciso analizar los riesgos que afectan a las aseguradoras en el ramo de vida, con el fin de realizar una buena gestión de los mismos, ya que el estudio de los riesgos no se limita a cuantificarlos (medirlos) sino también a obtener una buena protección frente a los mismos e intentar prevenirlos. En nuestro caso vamos a centrar la atención en el ramo de vida asegurador.

La gestión del riesgo, orientado al ramo de vida, se considera que es la coordinación perfecta entre el riesgo asegurable (el fallecimiento o supervivencia del asegurado) y una reducción adecuada de los costes del seguro. Dicha gestión del riesgo es un objetivo a alcanzar por todas las empresas, ya que como dice el teorema de Modigliani-Miller (1958), en su artículo "The cost of Capital, Corporate Finance and the Theory of Investment": una gestión eficiente del riesgo puede conducir a los siguientes efectos positivos:

- Reducir los impuestos, debido a una reducción en la variabilidad del cash-flow.
- Ser beneficioso para una empresa, en el sentido que ésta puede tener un mejor acceso a los mercados de capitales que los inversores individuales.
- Incrementar el valor de la empresa en caso de quiebra (haciendo además a ésta menos probable en cuanto a su ocurrencia). No obstante si existe una probabilidad de quiebra, por pequeña que sea, ésta tendrá un efecto muy negativo en los empleados y clientela de la empresa. Centrándonos en empresas aseguradoras está claro que muy pocos clientes querrán contratar una modalidad de seguro de vida con una aseguradora que se sabe cercana a la quiebra.
- Facilitar el obtener inversiones óptimas.

Los principales riesgos a los que se enfrentan las compañías de seguro son los siguientes:

- **Riesgo de mercado:** Se da tanto en el ramo de vida como en el de no vida. También se le conoce como riesgo de inversión, debido a que las aseguradoras invierten los fondos que en principio van destinados al pago de las prestaciones originadas por el acaecimiento de los siniestros cubiertos en la póliza, pero fondos que no se abonarán hasta pasados bastantes años (dado que la principal cobertura es la de fallecimiento del asegurado). Lógicamente estos fondos deben de estar invertidos en activos muy líquidos por si en un momento dado ocurriera el siniestro y desencadenara el pago de la prestación garantizada en la póliza. Es un riesgo que se deriva de la incertidumbre en cuanto a los rendimientos de las inversiones efectuadas por la aseguradora. Las compañías invertirán las primas cobradas y no destinadas aún a la cobertura de los siniestros de una manera eficiente. Se va a precisar un compromiso entre rendimiento y riesgo soportado.

- **Riesgo de liquidez:** Es la falta de posibilidad de convertir en dinero los activos en los que ha invertido sus recursos la aseguradora, y por lo tanto la imposibilidad de poder hacer frente al pago de las prestaciones del beneficiario del seguro de vida ante el fallecimiento del asegurado.

- **Riesgo de Crédito**: Es el riesgo que surge ante la incertidumbre de que no se pueda devolver una determinada cantidad de dinero en una fecha en concreto. La definición dada por Bessis (2002), es la que dice que es el riesgo de las pérdidas asociadas al evento de fallido del prestatario o al evento del deterioro de su calidad crediticia. Aplicado al ramo de seguros, es el riesgo de fallo de la contraparte, incluyendo el caso de que un reasegurador no sea capaz de poder hacer frente a sus compromisos fijados en el contrato de reaseguro.

- **Riesgo Operacional:** Es el riesgo de incurrir en pérdidas que resultan de un proceso interno inadecuado de personas o sistemas que afectan a la actividad de la empresa aseguradora. Es un riesgo que no es específico del ramo de vida y su cuantificación presenta grandes problemas debido a la falta de información que explique estos factores de riesgo que lo ocasionan.

- **Riesgo Adicional:** Es el riesgo que está inherente a las pólizas vendidas por una compañía aseguradora. Ejemplos de estos riesgos pueden ser los cambios en la conducta de las catástrofes naturales debido al cambio climático, cambios en las tablas de mortalidad de productos de vida o cambios en el comportamiento de los tomadores (conductas prepago).

- **Riesgo por contratar o peraciones del ramo de vida:** es el riesgo que surge por dicha contratación y que va asociado al comportamiento que sigue la compañía de seguros. Se trata de riesgos que se ponen de manifiesto en la tarificación del seguro de vida elegido (cálculo de la prima a pagar), en el proceso de constitución de las provisiones técnicas así como en el proceso de gestión del activo y el pasivo. Dentro de estos riesgos por suscribir vida se encuentran los que a continuación se detallan.

  - ***Riesgo de caída de cartera:*** Es el riesgo de obtener una tasa de reducciones, anticipos o rescates mayor o menor de la esperada o estimada por la compañía. Dentro de este tipo de riesgo se puede hacer una clasificación:

❖ Riesgo de rescate: Se trata de un valor garantizado en la póliza. Es el riesgo que surge por la facultad que tiene el tomador de denunciar el contrato, recibiendo de la compañía aseguradora el importe de la reserva matemática de dicho contrato de seguro.

❖ Riesgo de reducción: Surge como consecuencia del impago de la prima por parte del tomador. La reducción consiste en el hecho de dejar de pagar las primas por parte del tomador pero manteniendo en vigor el contrato de seguro, de tal manera que la indemnización se reducirá en proporción a las primas que se dejen de pagar.

Este riesgo de cartera se pone de manifiesto a través de las desviaciones que se producen entre el número de pólizas de la cartera que hipotéticamente se van a reducir o cancelar con el número de pólizas de la cartera que realmente se reducen o se cancelan.

o ***Riesgo Biométrico*:** Es un riesgo específico del ramo de vida, y surge como consecuencia de la incertidumbre que genera el comportamiento futuro de la mortalidad del asegurado en la actividad y resultados de la empresa. Es un riesgo que va vinculado a una incorrecta estimación de las probabilidades de supervivencia o fallecimiento de los asegurados.

El riesgo biométrico se estudia a partir de las desviaciones que surgen entre las tasas de mortalidad que se asumen (en base a las hipótesis actuariales) y las tasas de mortalidad reales.

Dentro del riesgo biométrico se diferencian varios tipos:

- Riesgo de mortalidad: Mortalidad superior a la que se esperaba
- Riesgo de longevidad: Supervivencia superior a la esperada
- Riesgo de incapacidad

Merece especial atención el estudio en profundidad de los riesgos biométricos, dado que son los específicos del ramo de vida.

Riesgo de mortalidad

Se trata de un riesgo que consiste en el aumento de la mortalidad de la cartera de la aseguradora por las pólizas contratadas. Es un riesgo aplicable a todas las pólizas contratadas para el ramo de vida con cobertura de este riesgo y siempre que el pago de la prestación por parte de la aseguradora ante el acaecimiento de la cobertura objeto del contrato de seguro sea superior a la provisión técnica constituida.

Existen diversos factores que pueden ocasionar un deterioro de la tasa de mortalidad, es decir, que la tasa de mortalidad real sea superior a la tasa de mortalidad esperada por una aseguradora. Estos factores son varios, tales como el riesgo por pandemias, catástrofes o deterioro de la mortalidad debido a los cambios demográficos.

Es preciso que la compañía haya establecido una adecuada política de recaudación de primas así como una constitución correcta de reservas matemáticas para poder hacer frente al pago de las indemnizaciones masivas que se pueden producir ante cualquiera de los efectos anteriormente nombrados.

Se define el riesgo por pandemia[2] como el riesgo de que se produzca una enfermedad epidémica que se extiende a muchos países o que ataca a casi todos los individuos de una localidad o región, pudiéndose producir un incremento aislado de la mortalidad por este motivo o incluso llegar a deteriorarse las expectativas de mortalidad futuras. (Ejemplo, el brote infeccioso de 1.918 o más recientemente la enfermedad de inmunodeficiencia adquirida, el SIDA).

Las pandemias se clasifican en tres tipos:

a) Por influencia humana

b) Por influencia Aviar (pollos): lo transmiten las aves migratorias a los pollos domésticos por influencia directa o indirecta. Se transmite a los humanos por contacto con las aves infectadas. La pandemia más reciente es la H5N1.

c) Por epidemias originadas por virus de influencia animal que alteran su estructura genética e infecta a humanos, o por virus humano que muta.

Ha habido tres grandes pandemias originadas por virus de influencia animal, en 1.918, donde murieron de 20 a 40 millones de personas en todo el mundo, en 1957, donde murieron unos 4 millones de personas y en 1968, donde murieron también unos 4 millones. Estudios médicos han estimado que se producen pandemias cada 30 ó 40 años, luego tiene sentido considerar a este riesgo como un riesgo a tener en cuenta por las aseguradoras, dada la proximidad de una cuarta a nivel mundial.

La OMS considera que se puede producir una cuarta pandemia aviar en este siglo XXI (debido a los movimientos cíclicos que presenta con intensidad variable). Actualmente las muertes que se han producido por la gripe aviar han sido debidas al contacto de las aves con los humanos, pero si se produjera la mutación del virus y comenzara el contagio entre humanos estaríamos ante una nueva pandemia. Y la OMS

[2] **Definición de pandemia según el diccionario de la Real Academia Española.**

considera que de producirse la pandemia el número de muertos se situaría en una horquilla entre 2 y 7.5 millones de personas en todo el mundo.

En lo que afecta a las compañías aseguradoras, el efecto que tendrá una pandemia será:

- Aumento de la cuantía y de la frecuencia en el pago de las prestaciones por fallecimiento o invalidez.
- Aumento del coste de los tratamientos médicos.

La constitución de las provisiones necesarias para paliar el efecto de una pandemia se ha de realizar de una manera progresiva en el tiempo, no de golpe, (en torno a unos 5 años) incrementándose las primas netas a través de recargos (ya sean implícitos o explícitos), obteniéndose de este modo primas recargadas o primas de riesgo.

Si las aseguradoras, en previsión de una pandemia, comenzaran a incrementar la prima, deberían garantizar que si finalmente transcurridos un número razonable de años no se hubiera producido dicha pandemia, devolverían si no toda, la mayor parte de las provisiones constituidas, o bien podrían destinar este dinero a aumentar el importe del capital asegurado ante la cobertura de fallecimiento.

Se puede considerar el caso de que se produjera una mortalidad catastrófica, con resultados peores que una pandemia. Es el caso de un accidente nuclear, por ejemplo, como sucedió en Chernóbil (Ucrania, 1986) o más recientemente en Japón (2011), con el accidente nuclear de Fukushima. Es una mortalidad catastrófica puesto que, a pesar de ocasionar un gran número de muertes, sus efectos se sienten durante generaciones posteriores.

Se define el riesgo por mortalidad debido a cambios demográficos como el riesgo que se produce debido a una variación en la estructura poblacional, tal como un incremento de la mortalidad.

Riesgo de longevidad

El riesgo de longevidad es el que se origina por una reducción en la tasa de mortalidad. Comprende el aumento paulatino de la esperanza de vida de las personas, debido a una mejora en la calidad de vida. A este proceso se le conoce con el nombre de envejecimiento poblacional (Sandell, (2003)). Las personas cada vez viven más años y se siguen jubilando a la misma edad, luego se está produciendo un aumento en el período en el que las personas están jubiladas.

Según la definición dada por el profesor Vegas Asensio, (2000): "El riesgo de longevidad, a partir de una tabla actuarial correctamente estimada, se define como al riesgo asociado a que el valor actual actuarial de las prestaciones a favor de una cabeza sea inferior al valor actual necesario para poder pagar las citadas prestaciones". Esta definición es aplicable a todas las modalidades de seguro de vida con cobertura de supervivencia así como a la constitución de los planes de pensiones.

Este riesgo afecta a las pólizas en las que está contratada la cobertura de supervivencia (en forma de capital o en forma de renta, ya sea vitalicia o temporal).

Ante la situación demográfica actual, lo que cabe preguntarse es cómo pueden las personas protegerse del riesgo de ser cada vez más longevas. La respuesta está en la contratación de pólizas de vida con cobertura de supervivencia con prestación en forma de rentas, los llamados "seguros de rentas". Estos seguros se caracterizan por la protección que ofrecen frente al riesgo de longevidad, ya que al contratar un seguro de este tipo el asegurado recibirá de manera periódica una serie de ingresos, bien sea vitalicios o temporales, que le protegerán ante el caso de que se quede sin ahorros. El inicio de la cobertura de un seguro de rentas puede ser inmediato (seguro de rentas inmediato) o puede estar diferido en el tiempo (un asegurado que contrate esta cobertura con 50 años pero no comiencen a devengarse los flujos hasta que no se alcance los 65 años).

El riesgo de longevidad individualmente considerado es compensatorio: los asegurados con cobertura de supervivencia en forma de renta que viven menos financian a los que son más longevos.

Riesgo de incapacidad

Se trata de un riesgo producido por el efecto de algún tipo de incapacidad, temporal o permanente, en la figura del asegurado. Es un riesgo que será aplicable a todos aquellos contratos en los que la aseguradora tenga que pagar una prestación por incapacidad.

Por incapacidad se entiende la situación que sufre una persona que por razones ligadas a la falta o pérdida de capacidad física, psíquica o intelectual tiene una necesidad de asistencia y/o ayuda importante para el quehacer de sus actividades diarias (definición del Consejo de Europa, en su informe titulado "Recomendación nº 98 (9) del comité de ministros a los Estados Miembros relativa a la dependencia", (1998)). Y la propia palabra de incapacidad nos conduce a la palabra dependencia, ya que las personas que sufren algún tipo de discapacidad son dependientes en mayor o menor grado de las que no sufren ningún problema físico, psíquico o intelectual para el desempeño de sus actividades diarias.

Para el estudio de la longevidad y la presencia de discapacitados entre los más longevos se emplean dos conceptos: la esperanza de vida y la tasa de discapacidad.

Esta tasa última mide el porcentaje de personas respecto del total mayores de 65 años que presentan alguna restricción o falta de capacidad para realizar una actividad considerada como normal para cualquier persona. Ejemplos de discapacidad pueden ser acciones como ver, oír, hacer las tareas del hogar, emplear adecuadamente las extremidades, relacionarse con otras personas, comunicarse o cuidarse a sí mismo.

Tiene sentido el riesgo de incapacidad en los seguros de vida por el hecho de que las personas que se encuentran aquejadas de alguna de las discapacidades anteriormente descritas suelen fallecer antes que una persona que no las padece.

Es cierto que en España la contingencia de invalidez es una contingencia cubierta por la Seguridad Social, pero también las compañías aseguradoras ofrecen cobertura ante esta alteración de la salud. No obstante lo normal es que las aseguradoras ofrezcan esta cobertura combinada con otras, como puede ser junto con la de fallecimiento en un seguro de vida entera o temporal.

El riesgo de incapacidad es un riesgo subjetivo, debido a que su cuantificación y evaluación depende de las personas e instituciones con autoridad para ello: el entorno asegurador y legislativo o los informes realizados por profesionales médicos. Se trata de un riesgo que evoluciona a lo largo del tiempo debido a mejoras en la renta, menor precariedad laboral, mayor seguridad en los puestos de trabajo, mayor salubridad e higiene, avances médicos o mejores hábitos de la población, tales como hacer ejercicio o dejar de fumar. Luego se trata de un riesgo dinámico, cambiante con la sociedad y con sus hábitos y costumbres.

2.2Medida de riesgo. Definición

Para llevar a cabo una política de gestión del riesgo eficiente será preciso previamente que éste se pueda cuantificar a través de alguna herramienta (medida de riesgo). Esta herramienta implica dos cosas:

- Que exista un daño económico potencial que se puede medir (en el caso del ramo de vida es el fallecimiento o supervivencia del asegurado).
- Que se pueda medir que probabilidad existe de que ocurra ese daño, esto es, la probabilidad de que ocurra el fallecimiento o supervivencia del asegurado.

El siguiente paso es definir que es una medida de riesgo. Se trata de un funcional $\mathrm{M}:\mathrm{X}\rightarrow[0,\infty)$ que hace corresponder a un riesgo X un número real no negativo $\mathrm{M(X)}$ (que puede ser infinito), el cual representa la cantidad adicional que se debe añadir a X (pérdida) para hacerlo aceptable (Sarabia et al, (2008)).

La cuantificación utilizando una medida de riesgo permite obtener un propósito cuádruple, tal como indica Tse (2009):

- Determinar el capital que necesita la compañía en cuestión, para mantener un nivel adecuado de solvencia. Se trata de un amortiguador frente a las pérdidas inesperadas que se pueden producir en la empresa. El tamaño de este capital depende no sólo del nivel de crédito que la compañía espera alcanzar, sino también de la probabilidad de insolvencia que dicha compañía está dispuesta a asumir. De cualquier modo, el primer paso que ha de dar la compañía para determina el nivel de capital requerido es cuantificar los posibles riesgos a los que se enfrenta.

- Determinar la prima del seguro. La prima es el coste que supone para el asegurado la transferencia del riesgo de sufrir una pérdida a la compañía aseguradora. La prima cobrada al asegurado debería ser directamente proporcional con la pérdida potencial. Por lo tanto, una medida de riesgo adecuada es importante para determinar la prima del seguro.

- Gestionar el riesgo interno de la empresa. La evaluación interna de la empresa será una labor mucho más sencilla si se encuentran cuantificados de una manera clara los riesgos. Tal como establece Solvencia II, en su pilar I, se deben de establecer mecanismos de regulación en lo que respecta a los niveles de capital propios que ha de tener una compañía de seguros para poder hacer frente a los riesgos asumidos.

- Generar informes de regulación externa. En lo referente a la solvencia de una compañía de seguros, los órganos reguladores han intentado institucionalizar el entorno regulador de la generación de informes, así como el establecimiento de una adecuada supervisión de tales informes. Solvencia II, en su pilar II establece que dichos órganos reguladores o supervisores son los que han de controlar la situación financiera de las entidades aseguradoras: controlar la exposición al riesgo de cada entidad de seguros, establecer modelos internos de gestión del riesgo, conseguir que el gobierno corporativo de las entidades se caracterice por la profesionalidad así como poder solicitar, si se estima conveniente, capitales extras a los calculados analizando cada compañía de manera individualizada. Estos órganos reguladores, por lo tanto, son los que deben de anticiparse para evitar que las compañías de seguro tengan problemas de solvencia. Es por ello por lo que las medidas de riesgo forman una parte importante del sistema de generación de informes regulatorios. Vinculado a este pilar se encuentra el tercero, que hace referencia a la transparencia que han de mostrar las entidades de seguros para la toma de decisiones. Esta transparencia queda plasmada tanto en el establecimiento de las recomendaciones que han de seguir las entidades de seguro para lograrla así como la facilidad que han de tener las aseguradoras para el acceso en el mercado a información importante. Esta información se centra en el conocimiento del nivel de recursos propios, el nivel de exposición al riesgo que tiene la entidad, los procesos de gestión del riesgo que utiliza la entidad así como su correcto uso.

El medir el riesgo es un hecho que ha originado múltiples publicaciones. Ya hablaron de ello autores como Artzner (1999), Dhaene et al (2003), Landsman (2001) o Wang (1999).Una medida de riesgo ha de permitir poder calcular de una manera correcta las primas que ha de cobrar una compañía de seguros. Y se entiende por una manera correcta el que dichas primas reflejen adecuadamente la incertidumbre que va inherente en la distribución de la variable aleatoria definida con anterioridad como X (pérdida). Diferentes autores han seleccionado una serie de principios para establecer un grupo de requisitos que se entiende debe de satisfacer una medida de riesgo, a pesar de que en la literatura actuarial no existe un criterio unificado sobre que propiedades son las que debe de cumplir una medida de riesgo. No obstante se van a enunciar las propiedades más comúnmente aceptadas (Artzner et al, (1999)) para luego establecer las que se han de cumplir para que la medida de riesgo sea considerada coherente, y, por lo tanto, poderla aplicar en este trabajo[3].

2.3Propiedades de las Medidas de Riesgo

En este epígrafe se explican una serie de propiedades que son consideradas como deseables para toda medida de riesgo. No existe un criterio unificado en cuanto a los axiomas deseables, pero en base a las aportaciones realizadas por los autores Gerber (1979), Heilmann (1989), Hurlimann (1994), Young (2004) y Goovaerts (2005), se enuncian las siguientes propiedades consideradas importantes:

1. **Margen de seguridad acotado por la esperanza.** $M(X) \geq E(X)$. Para que la compañía no entre en quiebra es preciso que la medida de riesgo considerada sea al menos igual a la pérdida esperada. O dicho de otro modo, el capital mínimo requerido debe de superar la pérdida esperada para que la ruina no afecte a la empresa considerada.

2. **Si se produce la existencia de un riesgo no aleatorio, entonces la medida de riesgo de ese riesgo no aleatorio es el propio riesgo.** $M(c) = c \quad c \geq 0$. Luego si se produce la existencia de un riesgo que no es una variable aleatoria, la medida de riesgo coincidirá con dicho riesgo no estocástico.

---

3 Como se verá más adelante, sólo se han de verificar cuatro de las propiedades para que una medida de riesgo sea considerada coherente.

3. **Propiedad de no exceso.** La medida de riesgo asociada a la variable aleatoria X no excederá del importe máximo de la pérdida. $M(X) \leq Max.(X)$

4. **Invarianza por traslaciones.** Se trata de un cambio de origen. Si a es una cantidad constante y X es la variable aleatoria de pérdidas, entonces se cumple que $M(X + a) = M(X) + a$

Esto implica que si el riesgo se incrementa en una cuantía fija y constante, dicha constante se ha de añadir a dicha medida de riesgo.

5.**Homogeneidad positiva.** Se trata de un cambio de escala. $M(aX) = aM(X) \;\; a \geq 0$. Esta propiedad es adecuada para corregir las tendencias inflacionistas. Esta propiedad está a menudo relacionada con la independencia con respecto a la unidad monetaria que se está empleando.

6.**Aditividad de riesg os comonó tonos.** Dos riesgos son comonótonos si presentan una relación de dependencia lineal entre ellos, esto es, si son linealmente dependientes. Según Heras (2010), la comonotonía implica la relación de dependencia positiva más fuerte. Si se consideran dos riesgos $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$, donde ω son los sucesos y Ω el espacio muestral de los mismos, dicha propiedad verifica que la medida de riesgo suma global de los riesgos es igual a la suma de las medidas de riesgo de cada uno de los mismos, cumpliéndose que $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$.

Este requerimiento se justifica por el hecho de que la puesta de los riesgos comonótonos juntos nunca disminuye el riesgo global de la situación: dichos riesgos comonótonos actúan siempre sobre el mismo evento y no pueden actuar uno en contra del otro.

7.**Subaditividad.** Si se consideran dos riesgos $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$, se verifica que $M(X_1 + X_2) \leq M(X_1) + M(X_2)$.

La idea de esta propiedad es que un riesgo se puede reducir mediante la diversificación. Si la igualdad se mantiene, entonces se habla de aditividad.

8.**Monotonía.** Para cualesquiera dos riesgos $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$, tal que $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ entonces se cumple que $M(X_1) \leq M(X_2)$. Esta propiedad dice que la cantidad de capital que se necesita para cubrir el riesgo asociado a una pérdida aleatoria X_1 es siempre menor que la correspondiente cantidad que se necesita para cubrir el riesgo asociado a otra pérdida X_2, cuando ésta última siempre supera a X_1.

Es bastante difícil que una medida de riesgo cumpla todas las propiedades que acabamos de revisar. Es por esto por lo que Artzner, (1999) y Tse (2009), establecieron una selección de estas propiedades, de modo que las medidas de riesgo que cumplan con dicha selección se consideran pues coherentes para lograr una gestión eficiente.

Por criterio de coherencia se entiende aquel que proporciona contribuciones al riesgo económicamente racionales. Tasche (2000) añade que dichos criterios de coherencia han de ser compatibles con la evaluación ajustada al riesgo, de modo que proporcionen una información correcta sobre los activos financieros, permitiendo así su adecuada gestión.

A continuación se indican las propiedades seleccionadas.

1. **Homogeneidad Positiva**

2. **Invarianza a las traslaciones o Consistencia.**

3. **Monotonía.**

4. **Subaditividad.**

Especificando cada una de estas propiedades al ramo asegurador se pueden dar cuatro posibles interpretaciones.

Una posible interpretación de la propiedad homogeneidad positiva significa que si se producen efectos inflacionistas al alza o a la baja o de cambio en la unidad de medida que afecten a la cuantía de esa pérdida, estos efectos se reflejan de una manera directamente proporcional en dicha prima.

Una posible interpretación de la propiedad invarianza a las traslaciones significa que si el riesgo cubierto por la compañía aseguradora se ve incrementado por algún factor externo, convirtiéndose así en un riesgo mayor para la compañía, este efecto negativo ha de trasladarse directamente de manera aditiva a la prima que cobra la compañía.

Una posible interpretación de la propiedad monotonía implica que si una compañía soporta la cobertura de un riesgo que es peor que otro, lógicamente por el riesgo que es más dañino para la compañía, ésta deberá de tener que cobrar una prima más elevada al tomador de la póliza.

Una posible interpretación de la propiedad de subaditividad significa que en una compañía de seguros que cuenta con una cartera compuesta por n pólizas, el riesgo global al considerar todas las pólizas de la cartera ha de ser menor o igual al riesgo de considerar cada una de las pólizas de manera individualizada, dado que al considerar la totalidad de la cartera los riesgos de cada póliza se compensan los unos con los otros.

2.4Tipos de medidas de riesgo

- Medidas de riesgo basadas en el principio de cálculo de prima:

Para una compañía de seguros un principio de cálculo de prima proporciona la cuantía mínima que tiene que abonar el asegurado a la compañía aseguradora para que ésta se haga cargo del riesgo.

Un principio de cálculo de prima es una medida de riesgo, dado que permite obtener una prima que es la cantidad de dinero mínima que una compañía de seguros debe de cobrar a sus tomadores para que a dicha compañía le interese firmar el contrato de seguro. Por lo tanto, los principios de cálculo de primas son ejemplos claros de medidas de riesgo. La característica clara de éstos es que el número real que resulta de su aplicación a la variable aleatoria del riesgo es el candidato para ser la prima asociada a la cobertura de la prestación de dicho riesgo aleatorio.

Por tanto, los principios de cálculo de primas están íntimamente relacionados con las medidas de riesgo, dado que dichos principios han de reflejar el comportamiento del asegurador respecto al riesgo que soporta como compañía de seguros.

Así, para un determinado riesgo que sea poco atractivo de soportar para la compañía de seguros, la prima que habría de abonar el tomador debería de ser superior a la prima que abonaría para la cobertura de un riesgo más atractivo para la compañía. Luego un principio de cálculo de prima es un caso particular de medida de riesgo, tal como indica Denuit, Dhaene, Goovaerts y Kaas (2005), en su libro "Actuarial Theory for dependent risks".

Los principios de cálculo de primas, considerados como medidas de riesgo que serán desarrollados y explicados en el capítulo siguiente son los siguientes:

a) Principio basado en la Esperanza Matemática
b) Principio de la varianza
c) Principio de la Desviación típica
d) Principio de la Prima Exponencial

e) Principio de la Prima Esscher

f) Principio basado en la Función de Distorsión

Estos principios han sido enumerados por Sarabia y Gómez Deniz (2008).

- <u>Medidas de riesgo basadas en el capital</u>:

Desde hace unos años ha habido un creciente auge en el mundo financiero y actuarial en el empleo de los cuantiles de probabilidad de la distribución de un riesgo, en este caso de la variable aleatoria pérdidas. Es por esto por lo que ha surgido la idea del Var, para responder a la pregunta de cuánto se puede esperar perder en un determinado horizonte temporal. El Var, tal como indica Garman y Blanco (1998), representa la mínima pérdida esperada para un horizonte de tiempo y un nivel de confianza determinado, medido en una moneda de referencia específica. Por ello se ha convertido en una herramienta cuantitativa de gran uso, aunque con inconvenientes.

Dado un riesgo X y un nivel de probabilidad $\xi \in (0;1)$, el Var, representado por $\mathrm{Var}[X;\xi]$ se define (Denuit et al, (2005)):

$$\mathrm{Var}[X;\xi] = F_X^{-1}(\xi)$$

El Var es probablemente una de las medidas de riesgo más ampliamente usadas en la literatura financiera. Se trata de una medida probabilística de las pérdidas esperadas para un período de tiempo en condiciones normales de mercado. Representa el peor escenario posible para una cartera seleccionada, dado un horizonte temporal y un nivel de significación. Es decir, el Var es un percentil de la distribución, de modo que el percentil 95 de la distribución indica el valor de la variable que tiene una probabilidad del 5% de ser superado. Conviene resaltar que la utilidad del Var se basa en una elección correcta de los parámetros anteriores, en base a lo que se pretenda evaluar.

El cálculo del Var exige dos cosas:

- Determinar el horizonte temporal en el cual se va a intentar estimar la pérdida potencial de la cartera.

- Determinar el nivel de confianza, siendo lo normal un nivel del 95% o del 99%.

El Var no se considera una medida de riesgo coherente puesto que no verifica una de las propiedades que serán explicadas más adelante, en concreto la de subaditividad (Artzner, (1999)). Dentro de la gestión del riesgo, esta propiedad es considerada una de las más importantes, puesto que está relacionada con la diversificación. Cuando se trabaja con carteras muy grandes es difícil poder cuantificar globalmente el riesgo, y es por esto por lo que es útil conocer el riesgo total como la suma de cada uno de los riesgos individualizados de la cartera. Pero el Var no estimula la diversificación, ya que esta medida no tiene en cuenta las consecuencias económicas de los sucesos que se pueden producir en una empresa, en este caso en la aseguradora, no siendo capaz de reconocer una concentración indebida de riesgos. Luego es una medida que puede llevar a proporcionar resultados contradictorios para una gestión adecuada del riesgo. Además, un valor aislado del Var dado un nivel de significación α no proporciona información sobre el tamaño de la cola de la distribución. Y esto es un problema importante en las compañías de seguro, dado que éstas están interesadas, no sólo en la probabilidad de acaecimiento del suceso sino también en la gravedad o severidad de dicho suceso. Con respecto a si esta medida verifica el resto de las propiedades explicadas en el epígrafe 2.3, conveniente señalar que cumple todas las explicadas, excepto la comentada al principio de esta párrafo.

Los valores que deberán tomar tanto el nivel de confianza como el horizonte temporal dependerán del propósito que se pretenda conseguir con el Var. De este modo se utilizará un nivel de significación elevado si se desea emplearlo para establecer los requerimientos de capital de la empresa. No obstante es recomendable trabajar con diferentes niveles de significación para así tener una visión más profunda de los riesgos asumidos por las inversiones realizadas por la empresa. Y lo mismo sucede con la elección del horizonte temporal. Un horizonte corto es apropiado si la cartera se supone que no cambia durante ese período. Basilea II recomienda un horizonte temporal de 10 días con un nivel de confianza del 99%, empleando como mínimo 1 año de datos.

El cálculo del Var para un producto de vida se basará en obtener la función de distribución de la variable aleatoria resultado (el valor de los ingresos que obtiene la compañía de seguros a través de las primas menos el valor del pago de las prestaciones que tiene que hacer la compañía para garantizar las prestaciones cubiertas en la póliza) para un horizonte temporal considerado y seleccionar el percentil apropiado en función del nivel de confianza que se necesite.

El Var tiene inconvenientes en su aplicación al ramo de vida, debido a que al tener los productos de vida una larga duración no se pueden emplear valores basados en la experiencia histórica. Además existe el problema de determinar la duración del horizonte temporal, ya que la representatividad del Var disminuye a medida que aumenta este plazo.

El empleo del Var en seguros de vida tiene por finalidad conocer cómo se ve afectada la posición del activo de la compañía (los ingresos que obtiene a través de la recaudación de las primas) y del pasivo (el flujo de pagos de las prestaciones cubiertas en las pólizas) antes variaciones en los factores de riesgo biométrico. Y para calcular esta medida de riesgo es preciso establecer hipótesis sobre cómo han de invertirse las primas, la evolución de los rendimientos de los activos y de los pasivos, los pagos que hay que realizar por prestaciones así como el nivel de las reservas necesarias.

Los procedimientos más clásicos para la obtención del Var son los siguientes:

1. **Estimación no paramétrica**: La llamada simulación histórica. Se caracteriza porque los datos que se van a emplear proceden de extracciones sin reemplazamiento. Una extensión de este método es el "Bootstrapping", caracterizado por ser un procedimiento en el que las extracciones se realizan con reemplazamiento (Dowd, K (2005)). Se basa en la experiencia pasada para estimar el futuro. No se establece ningún supuesto sobre cuál es la distribución de los rendimientos de la cartera, ni se asume que los parámetros tengan un determinado comportamiento. Según César Alonso et al (2006), esta aproximación implica emplear los retornos históricos para derivar el Var por medio del percentil empírico de la distribución de la muestra. La simulación histórica se basa en una distribución discreta que está construida para cada activo/pasivo con precios históricos y la frecuencia con que se presentaron en el

pasado. Se emplean los precios históricos para estimar los precios futuros. El pasado se emplea para explicar el futuro. No es necesario asumir distribuciones de probabilidad normales, luego esto permite una mejor estimación del Var ante distribuciones de colas anchas. Esta estimación funciona razonablemente bien para la estimación del Var si las condiciones de mercado permanecen estables en el tiempo. La desventaja que tiene es que se necesita una gran cantidad de datos para proporcionar datos fiables. No es un método válido si no se tienen suficientes datos para proporcionar una información razonable, o cuando no se confía en el pasado para explicar el presente o incluso el futuro. Para un seguro de vida este método no es válido al ser un producto de muy largo plazo y estar la información disponible desfasada.

2. **Estimación paramétrica** : Esta estimación implica que es preciso que se conozca la función de distribución de la variable pérdidas y ganancias, así como el comportamiento, tanto de la media como de la desviación típica (parámetros de la distribución). En este método se estima el Var suponiendo que la distribución de pérdidas y ganancias se distribuye según una normal. Existen diferentes modos de cálculo del Var de modo paramétrico, siendo el más conocido, por su fácil uso, a través de la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos. En este caso, se calcula el Var a través de la desviación típica de la cartera, mediante el empleo de un factor multiplicador, el cual depende del nivel de confianza que se haya seleccionado, y siempre bajo la premisa que los rendimientos de la cartera se distribuyen según una normal.

Si la cartera de activos sobre la que se quiere calcular el Var (medir el riesgo de la misma) tiene opciones, entonces se emplea el método Montecarlo para su estimación. Este método paramétrico es útil cuando:

- No se dispone de información histórica del comportamiento del activo
- La distribución del activo es muy diferente de la distribución normal.

Este método se caracteriza porque sus precios se generan de manera aleatoria desde la distribución de probabilidad, para de este modo simular el proceso de muestreo desde la situación actual. Por eso se intenta elegir una distribución de los diferentes factores de riesgo que esté lo más cercana posible a los datos de que se disponen, o que mejor represente el estado actual de conocimiento.

Todos los datos generados a partir de este método se representan como distribuciones de probabilidad o intervalos de confianza.

No existe un único método Montecarlo, pero todos los ajustes tienden a seguir una ruta determinada, que es la siguiente:

- Definición de un conjunto de posibles y diferentes factores de riesgo.
- Generación de los resultados de estos factores de riesgo de manera aleatoria con ordenador a partir del conjunto fijado.
- Se realiza sobre ellos un cálculo determinista.
- Se agregan los resultados de los cálculos individuales en un único resultado global.

Este método de cálculo del Var, al no tomar en cuenta sólo rendimientos pasados, no cuenta con límites de ningún tipo para estimar escenarios futuros atípicos, de modo que las estimaciones que se logran tendrán una gran fiabilidad. El problema típico de este método es lo complejo de su aplicación, ya que se exige una gran inversión en potentes equipos informáticos y en capital humano.

3. **Estimación semiparamétrica** Es aquella que implica conocer la distribución de los rendimientos, pero permitiendo considerar innovaciones en la varianza (César, J y Arcos, M (2006)). Es la estimación que se basa en una ponderación de la volatilidad, ya que la estimación paramétrica no permite actualizar la volatilidad y la simulación histórica la considera que se mantiene constante. La aproximación que combina una paramétrica con una no paramétrica es la propuesta por Hull y White (1998), la denominada simulación histórica filtrada (FHS) o la ponderación histórica (HW),

donde los parámetros se generan a partir de un modelo de comportamiento de la volatilidad.

El Var como medida de riesgo se caracteriza por ser una medida de riesgo universal, pudiéndose aplicar a cualquier fuente de riesgo, tiene una interpretación fácil, y resume en un solo número todas las fuentes de riesgo analizadas en la empresa. El inconveniente que presenta es que el Var considerado de manera aislada no proporciona ningún tipo de información acerca de la importancia de la cola de la función de distribución. Por eso surge otra medida de riesgo más completa, el TVar.

Dado un nivel de significación α, el TVar se define como el valor en riesgo en la cola (Alonso et al (2008)):

$$TVar_{\alpha}(X) = E\left[X / X > Var_{\alpha}(X)\right] = E(X / X > \rho) = \frac{\int_{\rho}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{\rho}^{\infty} f(x)dx} = \tag{2.4.1}$$

$$= \frac{1}{1-\xi}\int_{Var_{\xi}}^{\infty} x\, f_{X(x)dx}$$

Siendo ξ la probabilidad que queda a la izquierda del Var.

Según la definición, se trata de una medida de riesgo que representa, por un lado el nivel de pérdida esperado condicionado a que se supere el umbral de pérdidas del Var (Espected Shortfall), y por otro lado el promedio de los $(1-\alpha)$ 100% casos peores.

Por lo tanto, al TVar se le puede considerar como una medida alternativa al Var, que cuantifica las pérdidas que pueden existir en las colas de las distribuciones.

El Var controla el riesgo de mercado en un 99% de los casos o en un 95% de los casos (dependiendo del nivel de confianza elegido). El TVar hace la misma función pero en el 1% o en el 5% restante, luego se trata de una medida de riesgo complementaria a la anterior. Luego el TVar es la diferencia entre el valor esperado de la cartera al final del horizonte temporal y la media de la cola asociada al percentil ρ en el momento de la valoración (Alonso et al, (2008)).

Mientras que el Var se define como un umbral que sólo se supera con una probabilidad bajísima (normalmente del 1% o del 5%), el TVar es más restrictivo, dado que añade al Var la pérdida adicional esperada si se supera ese umbral especificado y considerando la distribución en la cola. Así, un TVar 95% es la media aritmética de todos los Var a partir del percentil 95.

La importancia de esta medida es que permite estudiar y analizar los rendimientos inferiores al Var, reflejando cual es la pérdida esperada en ese escenario. Es decir, el TVar añade al Var la pérdida adicional esperada si se supera el umbral especificado, luego está considerando también la distribución de la cola (Albarrán et al, (2008)). Así, dos carteras de activos con el mismo Var y aparentemente con el mismo nivel de riesgo, analizando el Tvar se puede determinar que la cartera con mayor riesgo es la que cuenta con un TVar mayor.

El TVar, a diferencia del Var, es una medida de riesgo coherente (Artzner, (1999)), ya que verifica las cuatro propiedades deseables para ello, incluyendo la de subaditividad. Se trata de una medida útil para distribuciones que presentan colas gruesas y asimétricas, tal como ocurre con la distribución de la siniestralidad de una cartera de pólizas de seguro (Alonso et al, (2008)). Con respecto al resto de las propiedades explicadas en el epígrafe 2.3, conveniente señalar que esta medida de riesgo, lo mismo que el Var, también las cumple.

Capítulo Tercero. Principios de cálculo de primas usuales desde la óptica de la medida de riesgo.

3.1 Introducción a los principios de cálculo de primas

La prima que abona el tomador al asegurador es el precio que ha de pagar para que la citada compañía lleve a cabo la cobertura de un riesgo. Dicho de otro modo, es el pago que un asegurado hace a un asegurador por la cobertura total o parcial contra un riesgo (Sarabia, (2008)).

Como se ha indicado en el capítulo anterior, se puede tarificar (empleo de un principio de cálculo de primas) a partir de una medida de riesgo coherente, puesto que se ajusta a la definición dada para ésta última, ya que la prima lo que hace es asignar un número real a una variable aleatoria, que en el ramo de no vida es la variable aleatoria pérdidas y en el ramo de vida es el valor actualizado del producto considerado (seguro de vida entera o de rentas, por ejemplo).

Y por definición, un principio de cálculo de primas es una función H(X) que asigna a un riesgo X un número real. Dicho número real es la prima. En la práctica el principio de cálculo de prima dependerá de la función de distribución F(X) que sigue la variable aleatoria X, de modo que en vez de hablar de una función H(X) se debe de hablar de funcional H[F(X)], tal como dice Gerber (1979), así como Sarabia y Gómez Déniz (2008).

Las primas se van a considerar buenas medidas de riesgo porque resumen la exposición de los riesgos globales de la compañía, ayudando a la misma a evaluar si hay suficiente dinero para cubrir los eventos adversos o siniestros, que en el caso de vida será sobrevivir o fallecer.

A continuación se indican los principios del cálculo de primas aplicables en el entorno segurador, tanto en el campo de vida como en el de no vida (Sarabia et al, (2008)), así como las propiedades que verifican cada uno de ellos. Es conveniente decir que, a excepción del primer principio que se aplica para los seguros de vida, todos los demás se aplican para el área de no vida.

3.2 Propiedades de los principios de cálculo de primas.

Previamente a estudiar los principios de cálculo de primas se establece una serie de propiedades que puede verificar un principio de cálculo de prima (Sarabia y Gómez Déniz, (2008)).

3.2.1 Independencia. $H(X)$ depende en exclusiva de la función de distribución de la variable X. Esta propiedad establece que la prima depende en exclusiva de la pérdida monetaria causada por el riesgo.

3.2.2 Recargo de seguridad no negativo o acotado por la esperanza. $H(X) \geq E(X)$. Esto significa que para evitar la ruina técnica la ganancia esperada tiene que ser no negativa.

3.2.3 Riesgos constantes. $H(c) = c$, para $c \geq 0$. Para un riesgo cierto $(X = c)$, con probabilidad $\Pr(X = c) = 1$, la prima que cobra la compañía aseguradora es la cuantía constante c.

3.2.4 No exceso. La prima no excederá a la reclamación máxima posible. $H(X) \leq \sup(X)$.

3.2.5 Consistencia o Invarianza a las traslaciones. Dado un riesgo X y una cuantía constante c, se verifica que $H(X + c) = H(X) + c$. Esto significa que si el riesgo se incrementa en una constante c, dicha constante ha de ser añadida a la prima.

3.2.6 Homogeneidad positiva. $H(Xc) = c\,H(X)$, para todo $c \geq 0$.

3.2.7 Aditividad. Para todo riesgo $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$, donde ω son los sucesos y Ω el espacio muestral de los mismos, dicha propiedad verifica que $H(X_1 + X_2) = H(X_1) + H(X_2)$.

3.2.8 Subaditividad. Cualesquiera dos riesgos $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$, donde ω son los sucesos y Ω el espacio muestral de los mismos, entonces se verifica que $H(X_1 + X_2) \leq H(X_1) + H(X_2)$.

3.2.9 Superaditividad. Cualesquiera dos riesgos $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$, donde ω son los sucesos y Ω el espacio muestral de los mismos, entonces se verifica que $H(X_1 + X_2) \geq H(X_1) + H(X_2)$.

3.2.10 Aditividad de riesgos independientes. Cualesquiera dos riesgos $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$ independientes, donde ω son los sucesos y Ω el espacio muestral de los mismos, entonces se verifica que $H(X_1 + X_2) = H(X_1) + H(X_2)$. Esto implica que el añadir riesgos independientes afecta a la prima total de manera aditiva.

3.2.11 Monotonía. Para cualesquiera dos riesgos $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$, donde ω son los sucesos y Ω el espacio muestral de los mismos, tal que $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ entonces se cumple que $H(X_1) \leq H(X_2)$.

La mayoría de estas propiedades de los principios de cálculo de primas coinciden con las propiedades de las medidas de riesgo. Afinando más se puede decir que los axiomas de coherencia de una medida de riesgo (epígrafe 2.3) están comprendidos dentro de estas propiedades. Luego el principio de cálculo de prima que verifique las cuatro propiedades necesarias para ser una medida de riesgo coherente, se dirá que, además de ser un buen principio de cálculo de prima es también una medida de riesgo coherente.

3.3 Principios de cálculo de prim as basados en medidas d e riesgo coherentes.

3.3.1 Tarificación empleando el principio del valor esperado. Estudio del caso particular cuando el parámetro θ toma el valor 0 (Principio de prima neta).

$H(X) = (1+\theta)\,E\left[X\right] \quad \theta > 0$, siendo θ el factor de recargo.

Este principio de cálculo de prima muestra una prima recargada de manera explícita.

A continuación se procede a verificar las propiedades consideradas como necesarias para que este principio de cálculo de primas sea considerado una medida de riesgo coherente (Artzner, 1999):

1. Propiedad de Subaditividad

Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2 :

$$
\begin{aligned}
&H(X_1 + X_2) = H(X_1) + H(X_2) \\
&H(X_1 + X_2) = \left[(1+\theta)E(X_1) + (1+\theta)E(X_2)\right] = (1+\theta)\left[E(X_1) + E(X_2)\right] = \\
&= (1+\theta)E(X_1) + (1+\theta)E(X_2) = H(X_1) + H(X_2)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple esta propiedad.

2. Propiedad de Homogeneidad Positiva

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y :

$$
\begin{aligned}
&Y = cX \\
&H(Y) = H(cX) = (1+\theta)E(cX) = c(1+\theta)E(X) = cH(X)
\end{aligned}
$$

Por tanto se cumple esta propiedad.

3. Propiedad de Monotonía

Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \geq X_2$ y para $\theta > 0$:

$$E[X_1] \geq E[X_2]$$
$$H(X_1) = (1+\theta)E[X_1] \geq (1+\theta)E[X_2] = H(X_2)$$
$$H(X_1) \geq H(X_2)$$

Por tanto se cumple la propiedad de Monotonía.

4. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = c + X$:

Se tiene que verificar que $H(Y) = H(X+c) = H(X) + c$

$$H(Y) = (1+\theta)E(c+X) = (1+\theta)[c + E(X)] =$$
$$= (1+\theta)c + (1+\theta)E(X) = (1+\theta)c + H(X)$$

Tal como se comprueba, no se cumple la propiedad anteriormente escrita.

Este principio del valor esperado no cumple las cuatro propiedades deseables para que pueda ser considerado como una medida de riesgo coherente.

Caso particular para el caso de que el parámetro $\theta = 0$: Principio de prima neta.

$$H(X) = (1+\theta)E[X]$$
$$\theta = 0$$
$$H(X) = E(X)$$

En el caso de que dicho factor de recargo sea cero se está ante el caso de la medida de riesgo llamada prima neta (Sarabia et al, (2008)).

Esta medida de riesgo apenas tiene aplicación en los seguros generales (no vida), siendo el motivo que esta medida asigna la misma prima a todos los riesgos que presentan el mismo valor esperado o media, teniendo en cuenta que el grupo de asegurados no es homogéneo. No obstante, es el principio que se aplica en el ramo de vida asegurador, dado que el colectivo con el que se trabaja es relativamente homogéneo, cosa que no ocurre en los seguros de la rama general.

El principio de prima neta, llamado principio de equivalencia actuarial, es un caso particular del llamado principio de utilidad nula, el cual basa su aplicación en funciones de utilidad para llevar a cabo la tarificación (Gil Fana, Heras y Vilar Zanón, (1999))[4].

Dado un nivel de riqueza inicial W que es conocida a priori, se llega a la expresión del principio de utilidad nula, el cual considera que el importe de las primas se ha de calcular en función de las preferencias subjetivas de cada asegurado y de su nivel de aversión al riesgo, todo ello estableciendo su función de utilidad.

$$U(W-\Pi_x)=E\left[U(W-S)\right] \qquad (3.3.1)$$

Este principio establece la igualdad entre la utilidad del asegurado en base a su riqueza disponible después del pago de la prima única de riesgo con el valor esperado (media) de la utilidad del asegurado en base a su riqueza disponible minorada ésta por el coste que le supone el acaecimiento del siniestro incierto que puede soportar. Los componentes de la ecuación (3.3.1) se definen a continuación:

- W: Riqueza que tiene el asegurado al principio del período considerado.
- Π_x: Prima única de riesgo que va a pagar el asegurado por transferir el riesgo a una compañía de seguros.
- S: Riesgo incierto que puede soportar el asegurado (en el ramo de vida es el riesgo de sobrevivir o fallecer), y que por tanto presenta un componente de aleatoriedad o incertidumbre.
- U: Función de utilidad, la cual puede adoptar diferentes formas matemáticas, tal como la lineal, exponencial o cuadrática (Gil Fana, Heras y Vilar Zanón, (1999))[5].

[4] **Ver fórmula 3.3.2.**

[5] **Tal como se expone más adelante, sólo la función de utilidad lineal es la que permite llegar al principio del valor esperado.**

Si no se verifica la igualdad se pueden producir dos situaciones extremas, que son los siguientes:

• $\left[U(W-\Pi_x\right] < E\left[U(W-S\right]$, en este caso el asegurado preferirá no pagar la prima única para que la compañía aseguradora le asegure. Preferirá hacer frente el mismo a los siniestros aleatorios cuando acaezcan.

• $\left[U(W-\Pi_x\right] > E\left[U(W-S\right]$, en este caso, como la utilidad del asegurado después del pago de la prima única será mayor que la utilidad del asegurado después de pagar el monto por los siniestros acaecidos, preferirá asegurarse, esto es, transferir los riesgos a una compañía aseguradora mediante el pago de la prima única.

Se va a considerar un caso particular de función de utilidad, en concreto la que adopta la forma matemática lineal, para demostrar, cómo a partir de ella se obtiene el principio de prima neta.

$$U(x) = ax + b$$

Se aplica el principio de utilidad nula, igualando los términos $\left[U(W-\Pi_x\right]$ con $E\left[U(W-S\right]$, llegando así a la expresión buscada.

$$\begin{aligned}
&U(W-\Pi_x) = a(W-\Pi_x) + b \\
&E\left[U(W-S\right] = E\left[a(W-S)+b\right] = aW - aE(S) + b \\
&a(W-\Pi_x) + b = aW - aE(S) + b \\
&aW - a\Pi_x = aW - aE(S) \\
&\Pi_x = E(X) = H(X)
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Esta medida de riesgo depende en exclusiva de la media o valor esperado de la variable aleatoria pérdidas, o valor esperado de la siniestralidad. Por lo tanto, si se produjera la circunstancia de la existencia de dos variables aleatorias de pérdidas con la misma media y el mismo valor del recargo, ambas variables tendrían la misma prima, independientemente de los momentos de orden superior como puede ser la varianza.

Y precisamente por depender en exclusiva del valor esperado es un principio de cálculo de prima que apenas se emplea en seguros de daños a terceros, no así en seguros de vida, debido a que este principio considera a todos los riesgos con la misma media, cuando esto no tiene demasiado sentido al tratar con un colectivo de asegurados heterogéneo.

Sea una función de pérdidas

$$L : R^2 \rightarrow R$$
$$(x;H) \rightarrow L(x;H)$$

A cada par $(x;H)$ se le hace corresponder la pérdida $L(x;H)$ en la que incurre el asegurado. Dicha pérdida toma la acción H y x el resultado de algún experimento aleatorio. En base a esto se define la prima de riesgo H como la prima que minimiza la pérdida esperada, siendo la función pérdida una variable aleatoria.

$$\mathrm{Min}\int_0^\infty L(x;H)\,dF_X(x) = \mathrm{Min}\,E\left[L(x;H)\right]$$

Derivando la expresión anterior con respecto a H e igualándola a cero se obtiene el valor mínimo (condición necesaria de mínimo).

Se tiene que emplear una función de pérdidas de la forma cuadrática para obtener el principio de prima neta: $L(x;H) = (x-H)^2$.

$$L(x;H) = (x-H)^2$$
$$\mathrm{Min}\int_0^\infty L(x;H)f(x)dx = \mathrm{Min}\int_0^\infty (x-H)^2 f(x)dx$$

Aplicando la condición necesaria para minimizar la pérdida:

$$-2\int_0^\infty (x-H)f(x)dx = -2\int_0^\infty x\,f(x)\,dx + 2H\int_0^\infty f(x)\,dx = 0$$
$$E(x) = H(x)$$

De este modo, al establecer la condición necesaria de mínimo se obtiene la esperanza matemática de riesgo.

A continuación se procede a verificar las propiedades consideradas como necesarias para que este principio de cálculo de primas sea considerado una medida de riesgo coherente (Artzner, (1999)):

1. Propiedad de Subaditividad

   Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2 :

   $$H(X_1 + X_2) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = H(X_1) + H(X_2)$$

Por lo tanto se cumple esta propiedad, dado que la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas.

2. Propiedad de Homogeneidad Positiva

   Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y:

   $$Y = cX;$$
   $$H(Y) = H(cX) = E(cX) = cE(X)$$

Por tanto se cumple esta propiedad.

3. Propiedad de Monotonía

   Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \geq X_2$:

   $$E[X_1] \geq E[X_2]$$
   $$H(X_1) = E[X_1] \geq E[X_2] = H(X_2)$$
   $$H(X_1) \geq H(X_2)$$

Por tanto se cumple esta propiedad.

4. Propiedad de Invariante a las traslaciones

Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = c + X$:

$$H(X+c) = E(X+c) = E(X) + c = H(X) + c$$

Se cumple la propiedad anteriormente escrita.

Este principio de prima neta, que es un caso particular del principio del valor esperado, cumple las cuatro propiedades deseables para que pueda ser considerado como una medida de riesgo coherente.

3.3.2 Tarificación empleando el principio de prima de la varianza

$H(X) = E\left[X\right] + \alpha V\left[X\right] \quad \alpha \geq 0$, donde α es el factor de recargo y $V\left[X\right]$ es la varianza. Esta medida de riesgo incorpora el factor de recargo de seguridad para poder hacer frente a las desviaciones aleatorias que va a tener la variable aleatoria pérdidas o siniestralidad. En esta expresión de prima, el factor de recargo es proporcional a la varianza, y muestra una prima recargada de manera explícita.

Si se considera una función de pérdida de la forma cuadrática ponderada se obtiene este principio de cálculo de prima.

$$L(x;H) = X(x-H)^2$$

$$\mathrm{Min}\int_0^\infty L(x;H)f(x)dx = \mathrm{Min}\int_0^\infty x(x-H)^2 f(x)dx$$

Aplicando la condición necesaria de mínimo para minimizar la pérdida se deriva respecto de H y se iguala a cero (Sarabia y Gómez Déniz, (2008)):

$$-2\int_0^\infty (x^2 - xH)f(x)dx = -2\int_0^\infty x^2 f(x)dx + 2H\int_0^\infty xf(x)dx = 0$$

$$E\left[x^2\right] = H\,E\left[x\right]$$

Por lo tanto se obtiene el principio de la varianza:

$$H(X) = \frac{E\left[x^2\right]}{E\left[x\right]} = E\left[x\right] + \frac{V\left[x\right]}{E\left[x\right]}$$

En este caso el parámetro α es el cociente $\dfrac{1}{E[x]} \geq 0$.

Verificación de las propiedades consideradas como necesarias para que este principio sea considerado una medida de riesgo coherente:

1. Propiedad de Subaditividad

   Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2:

$$H(X+Y)=E[X+Y]+\alpha V[X+Y] \not\leq E[X]+E[Y]+\alpha\,[V[X]+V[Y]+2Cov(X;Y)]$$

No cumple el principio de Subaditividad, salvo que las dos variables sean independientes.

2. Propiedad de Homogeneidad Positiva

   Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y:

$$\begin{aligned}&Y = cX;\\&H(Y) = E[Y] + \alpha Var[Y] = E[cX] + \alpha V[cX] =\\&= cE[X] + \alpha c^2 V[X] = c[E[X] + \alpha cV[X]] \neq cH(X)\end{aligned}$$

No cumple el principio de Homogeneidad positiva

3. Propiedad de Monotonía

   Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \geq X_2$:

$$\begin{aligned}&E[X_1] \geq E[X_2]\\&H(X_1) = E[X_1] + \alpha V[X_1] \not\geq E[X_2] + \alpha V[X_2]\end{aligned}$$

En este caso no se tiene por que cumplir que el principio de cálculo de prima del primer riesgo sea mayor o igual que el principio de cálculo de prima del segundo riesgo. Luego no cumple esta propiedad.

4. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

   Dado un parámetro $c \geq 0$ y la variable $Y = c + X$:

$$H(X+c) = E(X+c) + \alpha Var(X+c) = c + E(X) + \alpha Var(X) = c + H(X)$$

Por lo tanto se cumple el principio de invarianza a las traslaciones.

Este principio de cálculo de primas no cumple las cuatro propiedades para ser considerado como una medida de riesgo coherente.

3.3.3 Tarificación empleando el principio de cálculo de prima de la desviación típica.

$H(X) = E[X] + \alpha D[X] \quad \alpha \geq 0$, donde α es el factor de recargo y $D[X]$ es la desviación típica, mostrando una prima recargada de manera explícita. Del mismo modo que sucede considerando la medida de riesgo basada en el principio de cálculo de prima de la varianza, al considerar este nuevo principio de cálculo de prima la distribución de probabilidad de la variable aleatoria pérdidas que tenga una mayor dispersión (valores más alejados respecto de la media) tendrá un riesgo mayor, y esto parece una afirmación razonable.

A continuación se procede a verificar que este principio de cálculo de prima cumple los axiomas de coherencia:

1. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

   Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = c + X$:

   $$H(Y) = H(X+c) = E[X+a] + \alpha D[X+c] = c + E[X] + \alpha D[X] = c + H(X)$$

Por lo tanto se cumple esta propiedad.

2. Propiedad de Homogeneidad positiva

   Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y:

   $$Y = cX$$
   $$H(Y) = E[Y] + \alpha D(Y) = E[cX] + \alpha D[cX] =$$
   $$= cE[X] + \alpha cD[X] = c[E[X] + \alpha D[X]] = cH(X)$$

Por lo tanto se cumple esta propiedad de Homogeneidad positiva.

3. Propiedad de Monotonía

   Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \geq X_2$:

$$E[X_1] \geq E[X_2]$$
$$H(X_1) = E[X_1] + \alpha D[X_1] \ngeq E[X_2] + \alpha D[X_2] = H(X_2)$$

En este caso no se tiene por que cumplir que el principio de cálculo de prima del primer riesgo sea mayor o igual que el principio de cálculo de prima del segundo riesgo ante el caso de que $X_1 \geq X_2$, luego no cumple esta propiedad.

4. Propiedad de Subaditividad

   Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2:

$$H(X_1+X_2) = E[X_1+X_2] + \alpha\, D[X_1+X_2] \nleq E[X_1] + E[X_2] + \alpha\,[D(X_1) + D(X_2) + 2\sqrt{Cov\,(X_1,X_2)}]$$

No cumple la propiedad de subaditividad, excepto si las dos variables aleatorias consideradas son independientes.

Este principio de cálculo de prima no cumple las cuatro propiedades para ser considerado una medida de riesgo coherente.

3.3.4 Tarificación empleando el principio de prima exponencial

$H(X) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} E\left[e^{\alpha X}\right] \quad \alpha \rangle 0$, donde α es la llamada medida de Arrow-Pratt o constante de aversión al riesgo, que va asociada al decisor, mostrando una prima recargada de manera explícita. A este principio también se le conoce con el nombre de principio de utilidad exponencial puesto que se obtiene a partir de la función de utilidad de la forma $U(x)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha X})$. Aplicando el principio de utilidad nula y haciendo lo análogo de la expresión (3.3.1) se obtiene:

$$U(W-\Pi_x)=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(W-\Pi_x}\right)$$

$$E\left[U(W-S)\right]=\frac{1}{\alpha}E\left[1-e^{-\alpha(W-S)}\right]=\frac{1}{\alpha}\left[1-E(e^{-\alpha(W-S)})\right]=\frac{1}{\alpha}\left[1-E(e^{-\alpha W}e^{\alpha S})\right]$$

Por aplicación de dicho principio y operando:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\left[1-E(e^{-\alpha W}e^{\alpha S})\right]=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(W-\Pi_x}\right)\\
&\frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha W}E(e^{\alpha S})\right]=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(W-\Pi_x}\right)\\
&\left[-e^{-\alpha W}E(e^{\alpha S})\right]=\left(-e^{-\alpha(W-\Pi_x}\right)\\
&E\left[e^{\alpha S}\right]=e^{\alpha\Pi_x}\\
&\text{LogE}\left[e^{\alpha S}\right]=\text{Log}e^{\alpha\Pi_x}\\
&\Pi_x=\frac{1}{\alpha}\text{LogE}\left[e^{\alpha S}\right]
\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

Siendo S el riesgo incierto que puede soportar el asegurado, W es la riqueza del asegurado al inicio del período y Π_x es la prima única de riesgo.

Si se toma una función de pérdidas cuadrática se obtiene el mismo principio de cálculo de prima exponencial.

$$L(x;H)=\ \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha x}-e^{\alpha M}\right)^2$$

$$\text{Min}\int_0^\infty L(x;H)f(x)dx=\text{Min}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha x}-e^{\alpha H}\right)^2 f(x)dx$$

Aplicando la condición necesaria de mínimo para minimizar la pérdida:

$$H(X)=\frac{\text{LogE}\left[e^{\alpha X}\right]}{\alpha}$$

Verificación de las propiedades consideradas como necesarias para que este principio sea considerado una medida de riesgo coherente:

1. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

   Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = c + X$:

$$H[x+c] = H[x] + c$$

$$H[X+c] = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha(x+c)}\right]}{\alpha} = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha x}e^{\alpha c}\right]}{\alpha} = \frac{\mathrm{Log}\left[E\left(e^{\alpha x}\right)e^{\alpha c}\right]}{\alpha} =$$

$$= \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha x}\right] + \mathrm{Log}e^{\alpha c}}{\alpha} = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha x}\right]}{\alpha} + \frac{\alpha c}{\alpha} = H(x) + c$$

Por lo tanto se cumple la propiedad de invarianza frente a las traslaciones.

2. Propiedad de Homogeneidad positiva

   Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable Y:

$$H(X) = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha X}\right]}{\alpha}$$

$$H(Y) = H(cX) = cH(x)$$

$$H[cX] = \frac{\mathrm{Log}E\left[e^{\alpha cX}\right]}{\alpha} \neq cH[X]$$

Por lo tanto no cumple la propiedad de Homogeneidad positiva.

3. Propiedad de Monotonía

   Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \leq X_2$:

$$H\left[X_1\right] = \frac{LogE\left[e^{\alpha(X_1+c)}\right]}{\alpha} = \frac{LogE\left[e^{\alpha X_1+\alpha c}\right]}{\alpha}$$

$$H\left[X_2\right] = \frac{LogE\left[e^{\alpha(X_2+c)}\right]}{\alpha} = \frac{LogE\left[e^{\alpha X_2+\alpha c}\right]}{\alpha}$$

$$H\left[X_1\right] = \frac{LogE\left[e^{\alpha(X_1+c)}\right]}{\alpha} \leq H\left[X_2\right] = \frac{LogE\left[e^{\alpha(X_2+c)}\right]}{\alpha}$$

Por lo tanto se cumple esta propiedad de Monotonía.

4. Propiedad de Subaditividad.

   Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2:

$$H(X_1) = \frac{LogE\left[e^{\alpha X_1}\right]}{\alpha};$$

$$H(X_2) = \frac{LogE\left[e^{\alpha X_2}\right]}{\alpha};$$

$$H(X_1+X_2) = \frac{LogE\left[e^{\alpha(X_1+X_2)}\right]}{\alpha} = \frac{LogE\left[e^{\alpha X_1}e^{\alpha X_2}\right]}{\alpha} \not\leq \frac{LogE\left[e^{\alpha X_1}\right]}{\alpha} + \frac{LogE\left[e^{\alpha X_2}\right]}{\alpha}$$

Se cumple el principio de subaditividad en el único caso en que los dos riesgos analizados sean independientes (Sarabia y Gómez Déniz, (2008)).

Este principio de cálculo de primas no cumple las cuatro propiedades para ser considerado como una medida de riesgo coherente.

3.3.5 Tarificación empleando el principio de prima Esscher

$$H(X)=\frac{E\left[Xe^{\alpha X}\right]}{E\left[e^{\alpha X}\right]} \quad \alpha\rangle 0$$

Mediante la aplicación del principio de utilidad nula y maximizando la utilidad (tal como indica Kaas et al (2001), Terorema 5.5.3), se llega a la expresión del principio de prima Esscher anteriormente expuesto. Este principio muestra una prima recargada de manera explícita.

Se puede obtener este mismo principio a partir de una función de pérdidas que es el resultado de multiplicar una función de pérdidas cuadrática por una función exponencial, donde $\alpha>0$.

$$L(x;H)=e^{\alpha x}\left[x-H\right]^2$$

$$\mathrm{Min}\int_0^{\infty}L(x;H)f(x)dx=\mathrm{Min}\int_0^{\infty}e^{\alpha x}\left[x-H\right]^2 f(x)dx$$

Aplicando la condición necesaria de mínimo:

$$-2\int_0^{\infty}e^{\alpha x}\left[x-H\right]f(x)dx=-2\left[\int_0^{\infty}Xe^{\alpha x}f(x)dx-H\int_0^{\infty}e^{\alpha x}f(x)dx\right]=0$$

$$-2E\left[Xe^{\alpha x}\right]=2HE\left[e^{\alpha x}\right]$$

$$H(X)=\frac{E\left[Xe^{\alpha x}\right]}{E\left[e^{\alpha X}\right]}$$

Verificación de las propiedades consideradas como necesarias para que este principio sea considerado una medida de riesgo coherente:

1. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

   Dado un parámetro $c\geq 0$ y una variable $Y=c+X$:

$$H(X+c)=\frac{E\left[(X+c)e^{\alpha(X+c)}\right]}{E\left[e^{\alpha(X+c}\right]}=\frac{E\left[(X+c)e^{\alpha(X+c)}\right]}{E\left[e^{\alpha X}e^{\alpha c}\right]}=\frac{E\left[Xe^{\alpha(X+c)}+ce^{\alpha(X+c)}\right]}{E\left[e^{\alpha X}\right]\left[e^{\alpha c}\right]}=$$
$$=\frac{E\left[Xe^{\alpha X}e^{\alpha c}\right]+cE\left[e^{\alpha X}e^{\alpha c}\right]}{e^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]}=\frac{e^{\alpha c}E\left[Xe^{\alpha X}\right]+ce^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]}{e^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]}=$$
$$=\frac{e^{\alpha c}E\left[Xe^{\alpha X}\right]}{e^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]}+\frac{ce^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]}{e^{\alpha c}E\left[e^{\alpha X}\right]}=H(X)+c.$$

Por lo tanto cumple la propiedad de invarianza frente a las traslaciones.

2. Propiedad de Homogeneidad positiva

   Dado un parámetro $c \geq 0$ y una variable $Y = cX$:

$$H(Xc) \neq cH(X)$$
$$\frac{E\left[cXe^{\alpha Xc}\right]}{e^{\alpha Xc}} \neq c\frac{E\left[Xe^{\alpha X}\right]}{e^{\alpha X}}$$

Por lo tanto no cumple el principio de Homogeneidad positiva.

3. Propiedad de Monotonía

   Dados dos riesgos X_1 y X_2, tal que se verifica que $X_1 \leq X_2$:

$$H(X_1) \leq H(X_2)$$
$$H(X_1)=\frac{E\left[(X_1e^{\alpha X_1})\right]}{E\left[e^{\alpha X_1}\right]} \nleq H(X_2)=\frac{E\left[(X_2e^{\alpha X_2})\right]}{E\left[e^{\alpha x_2}\right]}$$

No tiene por qué cumplirse esta propiedad ante el caso de que el primer riesgo sea menor o igual al segundo.

4. Propiedad de Subaditividad.

   Dados dos riesgos cualesquiera X_1 y X_2 :

$$H(X_1+X_2) \leq H(X_1)+H(X_2)$$
$$\frac{E\left[(X_1+X_2)\,e^{\alpha(X_1+X_2)}\right]}{E\left[e^{\alpha(X_1+X_2)}\right]}=\frac{E\left[(X_1\,e^{\alpha X_1}\,e^{\alpha X_2})+(X_2e^{\alpha X_1}\,e^{\alpha X_2})\right]}{E\left[e^{\alpha X_1}\,e^{\alpha X_2}\right]}\nleq\frac{E\left[(X_1\,e^{\alpha X_1})\right]}{E\left[e^{\alpha X_1}\right]}+\frac{E\left[(X_2\,e^{\alpha X_2})\right]}{E\left[e^{\alpha X_2}\right]}$$

En este caso no se verifica que $H(X_1 + X_2) \leq H(X_1) + H(X_2)$, luego no se cumple la propiedad de subaditividad.

Este principio de primas no cumple las cuatro propiedades para ser considerado una medida de riesgo coherente.

Por lo tanto, a modo de conclusión, se puede decir que de los anteriores principios de cálculo de primas explicados, esto es, el principio del valor esperado, el principio de prima neta (caso particular del primero), el principio de la varianza, el principio de la desviación típica, el principio de prima exponencial y el principio de la prima Esscher, sólo el principio de prima neta cumple las cuatro propiedades consideradas como deseables para que sea considerado una medida de riesgo coherente. El inconveniente que presenta es que es el único principio en el que la prima no se encuentra recargada de ningún modo, ya que en los otros cinco principios restantes la prima se encuentra recargada de manera explícita. Y es por esto por lo que las compañías de seguro realizan como práctica habitual recargar esta prima neta, mediante el empleo de tablas de mortalidad desfasadas, para poder hacer frente a las desviaciones de la siniestralidad real.

3.4 El principio de cálculo de prima basa do en la función de distorsión de Wang.

Como se ha visto en los epígrafes anteriores del presente capítulo, el único principio de cálculo de primas, de los estudiados, que verifica las propiedades que debe cumplir una medida de riesgo para ser coherente es el que consiste en tomar como prima neta el valor esperado de la siniestralidad.

Esta prima no está recargada (ni explícita ni implícitamente), por tanto no incluye en su cálculo las posibles desviaciones de la siniestralidad real respecto de este valor esperado.

En este capítulo se desarrolla un principio de cálculo de primas ya introducido en el capítulo segundo, epígrafe 2.4, que, como se demostrará más adelante, constituye una medida de riesgo coherente y que además incluye un recargo implícito para hacer frente a las posibles desviaciones de la siniestralidad. Este principio está basado en la denominada función de distorsión de Wang (Wang, (1995)).

Inicialmente este principio de cálculo de primas ha sido utilizado en seguros del ramo no vida, y en esta tesis se generalizará al caso de los seguros del ramo de vida.

Función de Distorsión:

Sea la variable aleatoria X de las "pérdidas", con función de distribución $F_X(x)$ y función de supervivencia $S_X(x) = 1 - F_X(x)$, supuesto $X > 0$. La pérdida esperada de dicha variable tiene una expresión a partir de la función de supervivencia (definida en el apéndice 1) dada por:

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} S_X(x)dx$$

Se trata ahora de obtener una prima recargada más ajustada al riesgo basada en la denominada función de distorsión.

Dada una función g no decreciente (Wang, (1995)) definida por $g:[0,1] \to [0,1]$, con $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$, llamada función de distorsión, se define la prima de riesgo ajustada a la medida de riesgo esperanza distorsionada como:

$E_g[X] = H(X) = \int_0^{\infty} g(S_X(x))\, dx$, para un riesgo X con función de supervivencia $S_X(x)$. Es por esto por lo que la función de distorsión g no puede ser cualquier función, dado que ha de verificar las propiedades necesarias para que $g(S_X(x))$ sea considerada función de supervivencia, ya que lo que hace dicha función g es transformar la función de supervivencia $S_X(x)$.

Dado que g es una función no decreciente, y como la función de supervivencia $S_X(x)$ es una función no creciente, la transformada $g(S_X(x))$ es una función no creciente. A esta función que transforma la función de supervivencia se la denomina función de supervivencia ajustada al riesgo (Wang, (1995)).

Luego la finalidad de la función de distorsión es transformar una distribución de probabilidad $S_X(x)$ en una nueva distribución de la forma $g\left(S_X(x)\right)$. Y para ello es preciso que dicha función de distorsión cumpla las propiedades que a continuación se enuncian:

Supuesto que las funciones g y $S_X(x)$ sean derivables, la función de distorsión presenta las siguientes propiedades (Wang, (1996)):

1. La función $g\left(S_X(x)\right)$ es una función no creciente con respecto a x. Para ello, siendo g y S derivables, su primera derivada ha de ser menor o igual a 0.

$$\frac{dg\left(S_X(x)\right)}{dx} = g'\left(S_X(x)\right)\, S'_X(x) \le 0$$

2. La función $g\left(S_X(x)\right)$ está comprendida entre 0 y 1 cuando $x \in \left[0;+\infty\right]$.

- $S_X(0)=1$, luego $g\left(S_X(0)\right)=g(1)=1$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} S_X(x)=0$, luego $g\left(\lim\limits_{x\to\infty} S_X(x)\right)=g(0)=0$

3. Al verificar $g\left(S_X(x)\right)$ las propiedades primera y segunda de la función de supervivencia, y siendo g y $S_X(x)$ funciones continuas, se puede considerar a la función de supervivencia ajustada al riesgo como la función de supervivencia de otra variable aleatoria denotada por Y, con la siguiente función de densidad:

- $f_Y(x) = f_{X'}(x) = -\dfrac{dg\left(S_X(x)\right)}{dx} = -g'\left(S_X(x)\right)S'_X(x) = g'\left(S_X(x)\right)f_X(x)$

Y se tiene que $g'\left(S_X(x)\right)$ es una función de ponderación de la función de densidad $f_X(x)$.

Además si $g(x)$ es una función cóncava:

$$\frac{dg'\left(S_X(x)\right)}{dx} = g''\left(S_X(x)\right)\, S'_X(x) \ge 0.$$

La función de distorsión permite definir una nueva variable aleatoria Y, ya que la función $g(S_X(x))$ tiene las propiedades de función de supervivencia explicadas anteriormente. De este modo se ha recargado la distribución de probabilidad inicial, consiguiendo la distribución de probabilidad ajustada al riesgo, o también llamada distribución de probabilidad distorsionada.

Se ha explicado un principio de cálculo de primas que además constituye una medida de riesgo coherente, tal como se comprobará más adelante, construido en base a una función de distorsión cóncava.

A continuación se muestran diferentes ejemplos de medidas de riesgos basados en diversas formas de la función de distorsión. Estos ejemplos han sido mostrados por Tse (2009). Se pueden encontrar más ejemplos de funciones de distorsión en Wirch y Hardy (1999).

- Prima neta. Lleva asociada una función de distorsión lineal de la forma $g(u) = u$ la cual verifica las propiedades anteriormente explicadas para que sea considerada función de supervivencia.

Luego $H(X) = \int_0^{\infty} g(S_X(x))dx = \int_0^{\infty} (S_X(x))dx = E(X)$.

- Valor en riesgo. Se define:

$$Var_{\xi} = \int_0^{\infty} g(S_X(x))dx$$

Esta medida de riesgo lleva asociada una función de distorsión de la siguiente forma:

$$g(S_X(x)) = 1 \quad 0 \le x \le Var_{\xi}$$
$$g(S_X(x)) = 0 \quad x > Var_{\xi}$$

Luego el cálculo del Var mediante esta forma de la función de distorsión:

$$Var_{\xi} = \int_0^{\infty} g(S_X(x))dx = \int_0^{Var_{\xi}} g(S_X(x))dx + \int_{Var_{\xi}}^{\infty} g(S_X(x))dx =$$
$$= \int_0^{Var_{\xi}} 1dx + \int_{Var_{\xi}}^{\infty} 0\,dx = (x)_0^{Var_{\xi}} = Var_{\xi}$$

- TVar. Esta medida ha sido ya definida en el capítulo segundo, epígrafe 2.4. La forma que tiene la función de distorsión en este caso es la que a continuación se indica (con la condición que X sea continua):

$$g(S_X(x)) = 1 \qquad 0 \le x \le Var_\xi$$

$$g(S_X(x)) = \frac{S_X(x)}{1-\xi} \qquad x > Var_\xi$$

Luego el cálculo del TVar mediante esta forma de la función de distorsión es:

$$TVar = H(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))dx = \int_0^{Var_\xi} 1dx + \int_{Var_\xi}^\infty \frac{S_X(x)}{1-\xi}dx = (x)_0^{Var_\xi} + \int_{Var_\xi}^\infty \frac{S_X(x)}{1-\xi}dx =$$

$$= Var_\xi + \int_{Var_\xi}^\infty \frac{S_X(x)}{1-\xi}dx$$

Integrando por partes la integral (Tse, (2009)):

$$\frac{1}{1-\xi}\int_{Var_\xi}^\infty S_X(x)\,dx = \frac{1}{1-\xi}\left(x\,S_X(x)\right)_{Var_\xi}^\infty - \int_{Var_\xi}^\infty x\,S'_X(x)dx =$$

$$= \frac{1}{1-\xi}\left(-Var_\xi\,S_X(Var_\xi)\right) + \int_{Var_\xi}^\infty x\,f_X(x)dx =$$

$$= \frac{1}{1-\xi}\left(-Var_\xi(1-\xi)\right) + \int_{Var_\xi}^\infty x\,f_X(x)dx$$

Por tanto:

$$TVar = Var_\xi - Var_\xi + \frac{1}{1-\xi}\int_{Var_\xi}^\infty x\,f_X(x)dx = \frac{1}{1-\xi}\int_{Var_\xi}^\infty x\,f_X(x)dx$$

Esta expresión del TVar es la dada en el capítulo segundo, en la ecuación (2.4.1).

Es importante resaltar cómo a partir de la función de distorsión de Wang se obtienen diferentes medidas de riesgo ampliamente utilizadas.

- Transformada proporcional del tanto instantáneo. Este principio de cálculo de primas tiene una forma de función de distorsión con la siguiente expresión (Tse, (2009)):

$$g(u) = u^{\frac{1}{\rho}} \quad \rho > 0 \tag{3.4.1}$$

$H(X) = \int_0^{\infty} g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^{\infty} \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx$. Esta forma de función de distorsión es la que se va a emplear en esta tesis.

Esta expresión es a nivel general, definiéndose una nueva variable aleatoria Y, a partir del riesgo inicial denotado por X, con función de densidad y prima ajustada al riesgo dadas por:

$$\begin{aligned} S_Y(x) &= \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} \quad \rho > 0 \\ \Pi_\rho(X) = E(Y) &= \int_0^{\infty} \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

De la definición establecida en la ecuación (3.4.2) se extraen las siguientes consecuencias:

1. La $E(Y)$ es una función creciente con respecto de ρ.

$$\frac{dE(Y)}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2}\int_0^{\infty}\left(S_X(x)^{\frac{1}{\rho}} \mathrm{Log}\left(S_X(x)\right)\right)dx > 0 \tag{3.4.3}$$

   Dado que la expresión $\mathrm{Log}\left(S_X(x)\right) < 0$, a mayor ρ mayor prima ajustada al riesgo, justificándose de este modo la interpretación de dicho parámetro como un índice de aversión al riesgo, tal como indica Tse (2009).

2. Los tantos instantáneos de las variables aleatorias X e Y son proporcionales. En seguros no vida (Wang (1995)), dada la variable aleatoria no negativa X con función de distribución $F_X(x)$ y función de supervivencia $S_X(x)$, dado que:

$$S_Y(t) = S(t)^{\frac{1}{\rho}} = [e^{-\int_0^t \mu_x(u)du}]^{\frac{1}{\rho}} = e^{-\int_0^t \frac{1}{\rho}\mu_x(u)du}$$

Por tanto se verifica que:

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{\rho}\mu_x(t) \quad \rho > 0 \quad t \geq 0 \tag{3.4.4}$$

Los tantos de las variables X e Y son proporcionales, y es por esto por lo que la nueva variable aleatoria Y se denomina transformada proporcional del tanto instantáneo de la variable X, con parámetro ρ (Wang, (1996)).

En general, esta transformada sólo necesita que el parámetro sea mayor que cero, pero en el contexto de los seguros generales se considera que el parámetro sea $\rho \geq 1$, para así proporcionar más peso a la cola de la distribución del riesgo.

$S_Y(x) = g\left(S_X(x)\right) = \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, con valores de $\rho \geq 1$.

La función de supervivencia de la variable Y decrece más lentamente que la de la variable X, dando mayor densidad de probabilidad a los valores más grandes de la variable, y por tanto la prima ajustada al riesgo o también llamada prima recargada verifica que $E(Y) \geq E(X)$, siendo la diferencia el recargo de seguridad (recargo implícito).

Como se indica (Wang, (1995)), la prima ajustada al riesgo refleja por un lado lo arriesgado de la pérdida original, y por otro lado la graduación de la aversión del riesgo del decisor a través de los valores del parámetro ρ. Se demuestra en Wang (1996), para los valores de $\rho \geq 1$, que la medida de riesgo esperanza distorsionada, con la función transformada proporcional del tanto instantáneo constituye una medida de riesgo coherente, siendo necesaria la condición de $\rho \geq 1$ únicamente para la propiedad de subaditividad, dado que el resto de las propiedades sólo necesitan de $\rho > 0$.

Esta expresión es la que se conoce con el nombre de Transformada proporcional al tanto instantáneo, aplicada hasta la fecha sólo para no vida (Proportional Hazards Premiums Principle). Por lo tanto, la función de distorsión g es una herramienta para construir las medidas de riesgo.

En el caso de que el parámetro ρ adopte el valor de 1 se produce el caso particular de la medida de riesgo basada en el principio de la prima neta, explicada con anterioridad.

$$H(X)=\int_0^{\infty} g\big(S_X(x)\big)dx=\int_0^{\infty}\big(S_X(x)\big)^{\frac{1}{\rho}}dx=E(X) \qquad (3.4.5)$$

De la derivada realizada en la ecuación (3.4.3) se considera que ρ toma la adopción de coeficiente de aversión al riesgo, lo cual justifica lo que ya estableció el principio de utilidad nula, nombrado al comienzo de este capítulo (epígrafe 3.2.1), según el cual el cálculo de la prima depende de las preferencias subjetivas del asegurado frente al riesgo.

A continuación se procede a verificar si este principio de cálculo de primas cumple las cuatro propiedades consideradas deseables para que sea considerado una medida de riesgo coherente. Es conveniente recordar que de todos los principios de cálculo de primas estudiados hasta ahora en este capítulo, sólo el principio de prima neta constituye medida de riesgo coherente, así como el TVar. No así el Var, puesto que no verifica la propiedad de subaditividad (Denuit et al, (2005)).

Es importante señalar que las cuatro propiedades se encuentran demostradas por Wang (1995), por lo que no se va a repetir en esta tesis la demostración de las mismas. Con respecto a la última propiedad, la de subaditividad, se considera interesante la demostración hecha por Wang para el caso de $\rho \geq 1$, máxime teniendo en cuenta que dicha demostración va a servir como referencia por tenerla que volver a demostrar de manera completa aplicada a una de las modalidades de seguro que se presentan en este trabajo (seguro vida entera) y para el valor del parámetro $\rho \leq 1$.

1. Propiedad de Homogeneidad Positiva

   Dada una constante $c > 0$, se verifica, tal como se demuestra en el artículo de Wang (1995):

   $H(cX) = cH(X)$

2. Propiedad de Invarianza a las traslaciones

   Dada una constante $c > 0$, se verifica, tal como se demuestra en el artículo de Wang anteriormente nombrado de Wang (1995).

   $H(c + X) = c + H(X)$

3. Propiedad de Monotonía

   Si $X_2 \geq X_1$,
   Entonces se verifica que
   $H(X_2) \geq H(X_1)$
   Esta propiedad se encuentra demostrada en el artículo de Wang (1995).

4. Propiedad de subaditividad
   Esta propiedad se encuentra demostrada en el artículo de Wang (1995).

Por lo tanto, para valores de $\rho \geq 1$, el principio de cálculo de primas "Esperanza distorsionada con la función transformada proporcional del tanto instantáneo" constituye una medida de riesgo coherente (Artzner (1999)). Es un principio considerado válido a priori para aplicarlo al ramo de vida, dado que verifica las propiedades de coherencia.

Posteriormente será necesario analizar los resultados obtenidos en un seguro con cobertura de fallecimiento y en un seguro con cobertura de supervivencia para ver si, en estas modalidades de seguro, este principio sigue siendo coherente y qué campo de variación numérico se le dará al coeficiente de aversión al riesgo (ρ).

Para terminar con este capítulo es conveniente indicar la vinculación que existe entre un principio de cálculo de primas y una medida de riesgo. La definición de ambos conceptos es prácticamente la misma. Una medida de riesgo es una función M que asigna a un riesgo X un número real no negativo, $M(X)$, (ver capítulo segundo, epígrafe 2.2), número que representa la cantidad adicional que se añade al riesgo X para que sea cubierto por la compañía aseguradora, mientras que un principio de cálculo de primas es una función H(X) que asigna a un riesgo X un número real, siendo dicho número la prima. Es importante señalar que siempre se han de poder obtener las correspondientes primas que reflejen de manera adecuada la incertidumbre inherente en la distribución del riesgo X a partir de una medida de riesgo coherente. Luego en base a esto se deben de poder calcular primas a partir de una medida de riesgo coherente.

Y precisamente el principio de prima basado en la función de distorsión de Wang en forma de potencia constituye una medida de riesgo coherente por cumplir las cuatro propiedades consideradas deseables, tanto para los valores de $\rho \geq 1$, como se acaba de demostrar, como para los valores de $\rho \leq 1$, que se demostrará en el siguiente capítulo.

3.5 Cuadro resumen de las propiedades de los principios de cálculo de primas.

Se refleja en el siguiente cuadro las propiedades que cumple cada uno de los principios explicados en este capítulo.

TABLA 1: Propiedades de los principios de cálculo de primas

P.	Prima Neta	P. Valor Esperado	P. Varianza	P. Desviación típica	P. Exponencial	P. Prima Esscher	P. Prima Wang
Propiedad Monotonía	Sí	Sí	No No		Sí	No	Sí
Propiedad Subaditividad	Sí	Sí	No	No	No	No	Sí
Propiedad Invarianza traslaciones	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Propiedad Homogeneidad Positiva	Sí Sí		No	Sí	No	No	Sí

Fuente: Elaboración propia.

De entre todos los principios de cálculo de primas estudiados en este capítulo, sólo el principio de prima neta y el principio de prima de Wang mediante el empleo de la función de distorsión en forma de potencia verifican las cuatro propiedades considerables necesarias para que constituyan una medida de riesgo coherente. El hecho evidente que tiene el principio de la prima neta (el que se emplea en el ramo de vida asegurador actualmente), es que proporciona una prima no recargada, esto es, una prima que no hace frente a las desviaciones de la siniestralidad real con respecto a la esperada. Esto puede ocasionar problemas de solvencia a la compañía, y por este motivo lo que se hace en el ramo asegurador como práctica habitual es incorporar un recargo a las probabilidades de fallecimiento y supervivencia, y de este modo proporcionar una prima recargada. La recomendación de Solvencia II en lo que se refiere al importe de dicho recargo se encuentra especificada en el informe QIS5 (epígrafe 1.1).

En este trabajo se consigue justificar de manera teórica esta práctica habitual que realizan las aseguradoras de recargar las probabilidades de fallecimiento y supervivencia, a través del empleo de un principio de cálculo de primas, el principio de Wang, que es el que emplea una función de distorsión en forma de potencia, dado que éste proporciona una prima recargada implícitamente. Por esta razón se considera justificado su empleo para su aplicación en el cálculo de la prima de riesgo recargada en un seguro de fallecimiento (capítulo cuarto) y en un seguro de supervivencia (capítulo quinto).

Capítulo Cuarto. Tarificación, para caso continuo, de un seguro de d ecesos (modalidad vida entera).

4.1. Obtención de la prima única de riesgo a partir del principio d e equivalencia actuarial. Planteamiento General.

A continuación vamos a expresar la prima única de riesgo a partir del método clásico de tarificación (principio del valor esperado), basándonos en la función de supervivencia. Para ello se va a considerar esta modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento para un asegurado de edad actuarial x y cuantía de la prestación asegurada de 1 u.m, a abonar al beneficiario en el momento de acaecimiento del siniestro (fallecimiento).

Las hipótesis de partida son las siguientes:

- Capital asegurado unitario.
- Cabeza asegurada de edad actuarial x.
- Capital asegurado pagadero en el mismo instante del fallecimiento (caso continuo).
- El tipo de interés técnico es i.

En primer lugar se va a establecer la expresión de la prima mediante el empleo de la función de supervivencia a nivel general, sin especificar para ninguna ley de supervivencia, para, posteriormente, especificar la expresión de la prima en base a las diferentes funciones de supervivencia explicadas en el epígrafe anterior.

Consideremos el factor de actualización financiera $v = (1+i)^{-1} < 1$ y una variable aleatoria continua "edad de fallecimiento X" para un recién nacido, con función de supervivencia $S(x)$.

La expresión general de la prima para esta modalidad de seguro, por aplicación del principio de equivalencia actuarial (Bowers et al) (1997) es:

$P = \int_0^\infty v^t \, dG_x(t)$, donde $G_x(t)$ es la función de distribución de la variable aleatoria vida residual T_x (definida en apéndice 1).

Se trata ahora de expresar esta prima exclusivamente en función de la función de supervivencia de la variable aleatoria vida residual, y así poder aplicar la función de distorsión de Wang de la misma forma que se hace en el ramo no vida (Wang, (1995)). Esta aplicación se realiza a lo largo del presente capítulo, para la modalidad de seguro vida entera, así como en el capítulo quinto, para la modalidad de seguro con cobertura de supervivencia. En efecto:

$$P = \int_0^\infty v^t \, dG_x(t) = \int_0^\infty v^t \, d(1 - S_x(t)) = -\int_0^\infty v^t \, dS_x(t) .$$

Se hace el cambio de variable:

$$v^t = z$$
$$t \, \mathrm{Ln}\, v = \mathrm{Ln}\, z$$
$$t = \frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}$$

Si $t = 0$, entonces $v^0 = 1$. La variable z tomará el valor 1.

Si $\lim_{t \to \infty} v^t = 0$, la variable z tomará el valor 0 puesto que el factor v es menor que la unidad.

Por tanto se tiene:

$$P = -\int_0^\infty v^t \, dS_x(t) = -\int_1^0 z \, dS_x\left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}\right) = \int_0^1 z \, dS_x\left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}\right)$$

Integrando por partes se obtiene:

$$z = u \quad dz = du$$
$$dS_x\left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}\right) = dv \quad v = S_x\left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}\right)$$

$$P = \left(z \, S_x\left(\frac{\mathrm{Ln} z}{\mathrm{Ln} v}\right)\right)_0^1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\mathrm{Ln} z}{\mathrm{Ln} v}\right) dz = \left(1 \; S_x(0)\right) - \int_0^1 S_x\left(\frac{\mathrm{Ln} z}{\mathrm{Ln} v}\right) dz = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\mathrm{Ln} z}{\mathrm{Ln} v}\right) dz$$
.

Esto es así dado que $S_x(0)$ toma el valor de 1.

$$P = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{Ln\,z}{Ln\,v}\right)dz \qquad (4.1.1)$$

Ésta es la expresión de la prima única de riesgo de un seguro vida entera con capital asegurado de 1 u.m. en el momento de fallecimiento del asegurado en función de la función de supervivencia de la variable vida residual T_x, obteniéndose una expresión para la prima pura similar a la obtenida para los seguros de no vida proporcionada en el capítulo tercero, epígrafe 3.3.

Igualmente se puede expresar la prima anteriormente calculada en función de la función de supervivencia de la variable edad de fallecimiento X:

$$P = 1 - \int_0^1 \frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}dz = 1 - \frac{1}{S(x)}\int_0^1 S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)dz \qquad (4.1.2)$$

En lo que sigue se va a calcular la prima para esta modalidad de seguro con prestación garantizada de 1 u.m. en el caso continuo para la ley de supervivencia primera ley de Dormoy. Para las otras tres leyes restantes (segunda de Dormoy, ley de Gompertz y ley de Makeham), se muestra el desarrollo matemático en el apéndice 4. El fin que se busca es comparar estas primas con las primas que se obtendrán más adelante con la función de distorsión.

4.1.1 Aplicación de la primera ley de Dormoy para el cálculo de la prima única en esta modalidad de seguro.

Se calcula la prima en función de la función de supervivencia de la edad de fallecimiento. Para poderlo hacer es necesario recordar que valor toma dicha función de supervivencia:

$S(x) = S^x$

La prima de riesgo tiene esta forma:

$$P = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}\right)dz = 1 - \frac{1}{S(x)}\int_0^1 S\left(x + \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}\right)dz$$

Aplicando el cambio de variable establecido en el epígrafe 4.1:

$$P = 1 - \int_0^1 \frac{S^{x+\frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}}}{S^x}dz = 1 - \int_0^1 S^{\frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}}dz =$$

$$= 1 - \int_\infty^0 S^t v^t \operatorname{Ln} v\, dt = 1 + \operatorname{Ln} v\left(\frac{(Sv)^t}{\operatorname{Ln}(Sv)}\right)_0^\infty = 1 - \frac{\operatorname{Ln} v}{\operatorname{Ln} S + \operatorname{Ln} v} = \frac{\operatorname{Ln} S + \operatorname{Ln} v - \operatorname{Ln} v}{\operatorname{Ln} S + \operatorname{Ln} v} =$$

$$= \frac{\operatorname{Ln} S}{\operatorname{Ln} S + \operatorname{Ln} v}$$

La expresión final de la prima única aplicando la primera ley de Dormoy es la siguiente:

$$P = \frac{\operatorname{Ln} S}{\operatorname{Ln} S + \operatorname{Ln} v} \tag{4.1.3}$$

4.1.2 Tabla resumen de las primas únicas de riesgo para cada una de las leyes de supervivencia anteriormente empleadas para un seguro vida entera.

A continuación se muestra una relación de la prima única de riesgo calculada mediante el empleo de las funciones de supervivencia de la edad de fallecimiento más habituales en la práctica. Es preciso que quede clara la idea que se pretende mostrar en este capítulo, que es servir de base para poder recargar de manera implícita la prima modificando la función de supervivencia, a través de la función de distorsión de Wang.

TABLA 2: Resumen de las primas únicas de riesgo

Leyes Supervivencia	**Prima Única de Riesgo**
Primera Ley de Dormoy	$P=\frac{\text{Ln}\,S}{\text{Ln}\,S+\text{Ln}\,v}$
Segunda Ley de Dormoy	$P=1-\frac{\text{Ln}\,v}{\text{Ln}S_1+\text{Ln}\,v+2x\text{Ln}S_2+2\text{Ln}S_2}=\frac{\text{Ln}S_1+(2x+2)\text{Ln}S_2}{\text{Ln}S_1+\text{Ln}\,v+(2x+2)\text{Ln}S_2}$
Ley de Gompertz	$P=1-\frac{\text{Ln}\,v}{g^{C^x}\left(C^{x+1}\,\text{Ln}\,g+\text{Ln}\,v\right)}=\frac{g^{C^x}\left(C^{x+1}\,\text{Ln}\,g+\text{Ln}\,v\right)-\text{Ln}\,v}{g^{C^x}\left(C^{x+1}\,\text{Ln}\,g+\text{Ln}\,v\right)}$
Ley de Makeham	$P=1\frac{\text{Ln}v}{g^{C^x}\left(\text{LnS}+\text{Lnv}+C^{x+1}\,\text{Lng}\right)}=\frac{g^{C^x}\left(\text{LnS}+\text{Lnv}+C^{x+1}\,\text{Lng}\right)-\text{Lnv}}{g^{C^x}\left(\text{LnS}+\text{Lnv}+C^{x+1}\,\text{Lng}\right)}$

Fuente: Elaboración propia. Tabla que relaciona las primas únicas de riesgo, calculadas por aplicación del principio de equivalencia actuarial, con cada una de las leyes de supervivencia explicadas en el Apéndice 3.

4.2 Tarificación de la prima única de riesgo recargada a partir de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia. Planteamiento general.

Tal y como se ha dicho en el capítulo tercero de este trabajo, se pretende modificar o distorsionar la función de supervivencia, originando así una prima recargada, esto es, redefinir la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "vida residual".

La función $g\left(S_X(x)\right)$ es la que se llama función de supervivencia ajustada al riesgo, siendo la forma que se va a emplear de función de distorsión la de potencia.

$g\left(S_X(x)\right) = \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, con valores de $\rho \geq 1$ (Wang, (1996)). Veremos que al aplicar la función de distorsión para el cálculo de la prima única de riesgo, ésta se incrementa de manera implícita. De este modo se obtiene la prima recargada, teniendo el parámetro ρ la consideración de parámetro de aversión al riesgo. Por lo tanto, el hecho de que la prima sea creciente con respecto a ρ justifica su interpretación.[6].

Lo que se pretende mostrar en este capítulo es el efecto que tiene modificar la función de supervivencia para un seguro de vida entera (la ya definida función de supervivencia ajustada al riesgo, en el epígrafe 3.4), así como los valores numéricos que se tendrán que asignar al parámetro ρ para la modalidad de seguros vida entera.

La prima única de riesgo de un seguro vida entera con capital asegurado de 1 u.m. en el momento de fallecimiento del asegurado, en términos de la función de supervivencia de la variable vida residual, es la que se ha calculado en (4.1.1):

$$P = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}\right) dz$$

[6] **La justificación del parámetro ρ como parámetro de aversión al riesgo ya se ha llevado a cabo en el capítulo tercero, epígrafe 3.4, expresión (3.4.3).**

La prima anteriormente calculada en términos de la función de supervivencia de la variable edad de fallecimiento:

$$P = 1 - \int_0^1 \frac{S\left(x + \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}\right)}{S(x)} dz = 1 - \frac{1}{S(x)} \int_0^1 S\left(x + \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}\right) dz$$

La prima recargada obtenida a partir de la función de distorsión en forma de potencia tiene la forma:

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 S_x \left(\frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}\right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = 1 - \frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}} \int_0^1 S\left(x + \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz \qquad \rho \leq 1 \qquad (4.2.1)$$

El objetivo que se busca es obtener una prima recargada mayor que la prima pura de riesgo, y esto se consigue, en este caso en concreto, haciendo que el parámetro ρ sea menor que la unidad. Esta afirmación se justifica de este modo: conforme menor sea el parámetro ρ, menor será el valor de la integral, por lo que la prima recargada será mayor. Dicho de otro modo, en un seguro con cobertura de fallecimiento, a la compañía aseguradora le interesa que el asegurado no fallezca o que lo haga lo más tarde posible, ya que si el óbito acaece pronto el resultado de la póliza será negativo para la compañía. Si se considera un tanto mayor[7], entonces se recarga la prima (para $\rho \leq 1$) luego la prima recargada será mayor, puesto que la compañía cobrará más dinero a los asegurados al presentar estos un tanto instantáneo de mortalidad mayor.

[7] **Referencia a la ecuación (3.4.4), donde se refleja que el tanto instantáneo de mortalidad asociado a la variable Y recargada coincide con el tanto instantáneo asociado a la variable X inicial, pero con un factor de proporcionalidad $\frac{1}{\rho}$.**

El hecho de que el exponente $\frac{1}{\rho}$ sea mayor que la unidad significa que para cada valor de $t = \frac{Lnz}{Lnv}$, la función de supervivencia distorsionada es menor que la inicial, dando esto lugar a que se considere que el asegurado tiene un riesgo de fallecer mayor, como se ha explicado en el párrafo anterior. De esta forma, al considerarse una siniestralidad superior a la esperada, se obtiene una prima recargada.

Así mismo, esta esperanza distorsionada cumple todas las propiedades de una medida de riesgo coherente, tal como se demuestra a continuación (realizada la demostración para la propiedad de subaditividad, ya que el resto sólo precisan del valor del parámetro mayor que 0). Esta es una de las aportaciones de la tesis, puesto que Wang demostró que se verificaba esta propiedad sólo para el caso de que el parámetro $\rho \geq 1$, y aplicado al entorno de los seguros generales (indicado en el capítulo tercero, epígrafe 3.4). A lo largo del capítulo quinto se aplica este mismo campo de variación del parámetro para un seguro de vida con cobertura de supervivencia.

TEOREMA 1:

Para todo par de variables aleatorias U y V no negativas, y la medida de riesgo dada por:

$$\Pi_\rho(U) = 1 - \int_0^1 \left(S_U(z)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz \quad \rho \leq 1, \ \ z = v^t, \ \ v = \frac{1}{1+i},$$

Verifica la propiedad de subaditividad:

$$\Pi_\rho(U+V) \leq \Pi_\rho(U) + \Pi_\rho(V) \qquad (4.2.2)$$

La demostración del teorema 1 se lleva a cabo de un modo similar al del artículo de Wang (1995).

Primero se establece lo siguiente:

LEMA 1: Si $0 < a < b$, y $\rho \leq 1$, entonces para todo $x \geq 0$, se tiene que:

$$\left(-(x+b)^{\frac{1}{\rho}}\right)-\left(-(x+a)^{\frac{1}{\rho}}\right)\leq(-b)^{\frac{1}{\rho}}-(-a)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Demostración:

Sea la siguiente función:

$$g(x)=-\left((b+x)^{\frac{1}{\rho}}\right)-\left(-(a+x)^{\frac{1}{\rho}}\right)$$

$$g'(x)=-\frac{1}{\rho}\left(b+x\right)^{\frac{1}{\rho}-1}+\frac{1}{\rho}\left(a+x\right)^{\frac{1}{\rho}-1}=\frac{1}{\rho}\left((a+x)^{\frac{1}{\rho}-1}-(b+x)^{\frac{1}{\rho}-1}\right)<0$$

Como la primera derivada es menor que cero puesto que el exponente $\left(\frac{1}{\rho}-1\right)$ es mayor que 0 y $(a+x)<(b+x)$, entonces $g(x)$ es decreciente y al estar definida para $x \geq 0$ su valor máximo estará en $x = 0$. Por tanto:

$$\left(-(x+b)^{\frac{1}{\rho}}\right)-\left(-(x+a)^{\frac{1}{\rho}}\right)\leq(-b)^{\frac{1}{\rho}}-(-a)^{\frac{1}{\rho}}$$

Fin de la demostración del Lema.

Demostración del Teorema 1:

La demostración hace uso del método de inducción completa en la misma línea que Wang (1995) y se extenderá al caso de $\rho \leq 1$.

Primero se demuestra que el resultado es verdadero para una variable aleatoria V cualquiera y U una variable aleatoria discreta que toma los valores $U \in \{0;1;\ldots n\}$.

Después, aplicando las propiedades de invarianza a la traslación y homogeneidad positiva también se probará para toda variable discreta $U \in \{kh.,...(n+k)h\}, (h,k>0)$. Finalmente, dado que toda variable aleatoria puede ser aproximada por una variable discreta U con los adecuados h y k, el resultado habrá sido probado para toda variable.

Volviendo a la expresión (4.2.2) y razonando por el método de inducción completa:

-Si n =0, entonces U=0, luego el resultado es trivial.

-Supuesto que se verifica para el valor n se va a demostrar para el caso n+1.

Dadas $(U;V)$ con $U \in \{0;1;...n+1\}$, sean $(U^*;V^*)$ distribuidas como $(U,V/U>0)$.

Suponiendo que $U^* \in \{1;2;...n+1\}$ la hipótesis de inducción completa establece que se verificará:

$$\Pi_\rho(U^*+V^*) \le \Pi_\rho(U^*) + \Pi_\rho(V^*)$$

Escribiendo $\omega_0 = \Pr(U=0)$ y $S_{V/0}(t) = \Pr(V>t/U=0)$, para todo t>0 se tiene

$\Pr(U>t) = \Pr(U^*>t/U>0)\ \Pr(U>0)$, es decir:

$$S_U(t) = (1-\omega_0)\ S_{U^*}(t)$$

Por otro lado se tiene:

$$S_V(t) = \Pr(V>t) = \Pr(V>t/U=0)\ \Pr(U=0) + \Pr(V>t/U>0)\ \Pr(U>0) =$$
$$= S_{V/0}(t)\,\omega_0 + S_{V^*}(t)(1-\omega_0)$$

$$S_V(t) = \Pr(V>t) = \Pr(V>t/U=0)\ \Pr(U=0) + \Pr(V>t/U>0)\ \Pr(U>0) =$$
$$= S_{V/0}(t)\,\omega_0 + S_{V^*}(t)(1-\omega_0)$$

También se tiene:

$$S_{U+V}(t) = \Pr(U+V>t) = \Pr(U+V>t/U=0)\ \Pr(U=0) + \Pr(U+V>t/U>0)\ \Pr(U>0) =$$
$$= S_{V/0}(t)\omega_0 + S_{V^*+U^*}(t)(1-\omega_0)$$

De acuerdo con lema 1:

$$-\left(S_{U+V}(t)^{\frac{1}{\rho}}\right)-\left(-S_U(t)^{\frac{1}{\rho}}\right)-\left(-S_V(t)^{\frac{1}{\rho}}\right)=-\left(\omega_0 S_{V/0}+\left(1-\omega_0\right)S_{U^*+V^*}(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$-\left((1-\omega_0)S_{U^*}(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}-\left(\left(-S_{V/0}(t)\omega_0+S_{V^*}(t)(1-\omega_0\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$\leq(1-\omega_0)^{\frac{1}{\rho}}\left(-S_{U^*+V^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}-\left(-S_{U^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}\right)-\left(-S_{V^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right)\leq\left(-S_{U^*+V^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}-\left(-S_{U^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}\right)-\left(-S_{V^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right)$$

Integrando en ambos lados de la desigualdad y sumando un 1 a cada integral se tiene:

$$\begin{aligned}&1-\int_0^\infty S_{U+V}(t)^{\frac{1}{\rho}}dt-\left(1-\int_0^\infty S_U(t)^{\frac{1}{\rho}}dt+1-\int_0^\infty S_V(t)^{\frac{1}{\rho}}dt\right)\leq\\&1-\int_0^\infty S_{U^*+V^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}dt-\left(1-\int_0^\infty S_{U^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}dt+1-\int_0^\infty S_{V^*}(t)^{\frac{1}{\rho}}dt\right)\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

La expresión (4.2.3) se puede escribir de esta manera:

$$\Pi_\rho(U+V)-\left(\Pi_\rho(U)+\Pi_\rho(V)\right)\leq\Pi_\rho(U^*+V^*)-\left(\Pi_\rho(U^*)+\Pi_\rho(V^*)\right)\leq 0$$

Empleando el supuesto de inducción por el cual U^* y V^* verifican la propiedad de la subaditividad, se deduce que U y V también la verifican, llegándose así al fin de la prueba de inducción. Y dado que toda variable aleatoria continua se puede aproximar por una variable discreta, el resultado se puede generalizar a todo par de variables aleatorias.

Por lo tanto se puede concluir que este principio de cálculo de primas constituye una medida de riesgo coherente aplicado a la modalidad de un seguro vida entera.

4.2.1 Prima recargada y nuevo tanto instantáneo.

La prima recargada implícitamente y ya definida en (4.2.1) se ha obtenido a través de la transformada proporcional del tanto instantáneo. A continuación se muestra la justificación matemática de dicha afirmación. El hecho de que el factor de proporcionalidad sea justamente el exponente de la función de distorsión, esto es, $\frac{1}{\rho}$, es otra aportación de esta tesis.

TEOREMA 2:

La prima recargada obtenida en (4.2.1) coincide con la prima pura de otra variable Y, definida en (3.4.2), con el mismo modelo de supervivencia que el de la variable inicial X, pero con un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al tanto instantáneo de dicha variable X.

Demostración:

Se parte de la expresión siguiente

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

Llamando $r = \frac{1}{\rho}$ e integrando por partes:

$$u = \left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^r$$

$$du = r\frac{1}{zLnv}S'_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{r-1}$$

$$dz = dv \qquad z = v$$

$$P_{rec} = 1 - \left(z\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^r\right)_0^1 - \int_0^1 zr\frac{1}{zLnv}S'_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{r-1} dz =$$

$$= 1 - \left(1 - \int_0^1 zd\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^r\right) = \int_0^1 zd\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^r$$

Haciendo el cambio de variable $z = v^t$ resulta:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ln} z = t \operatorname{Ln} v \\
&t = \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} v} \\
&P_{rec} = \int_0^{\infty} v^t d\left(S_X(t)\right)^r = -\int_{\infty}^{0} v^t d\left(S_X(t)\right)^r \\
&P_{rec} = \int_0^{\infty} v^t d\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Si se llama $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, entonces la expresión final de la prima recargada es:

$$P_{rec} = -\int_{\infty}^{0} v^t d\left(S_Y(t)\right) \tag{4.2.5}$$

La nueva expresión de prima obtenida se corresponde a la prima única de un seguro de la misma modalidad (seguro de vida entera) pero para una nueva variable aleatoria llamada Y, cuya función de supervivencia tiene la expresión $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$ (ya definida en (3.4.2)).

La expresión del tanto instantáneo de la variable Y es la siguiente:

$$\mu_Y(t) = -\frac{S'_Y(t)}{S_Y(t)} = -\frac{\frac{1}{\rho} S'_X(t)\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}} = -\frac{1}{\rho}\frac{S'_X(t)}{S_X(t)} = \frac{1}{\rho}\mu_X(t) \tag{4.2.6}$$

siendo $\mu_X(t)$ el tanto instantáneo de la variable inicial X. Por tanto se llega al final de la demostración concluyendo que la prima recargada obtenida a partir de la medida de riesgo esperanza distorsionada coincide con la prima pura obtenida para la misma ley de supervivencia, pero con un tanto proporcional, con factor de proporcionalidad $\frac{1}{\rho}$.

En concreto, cuando se verifica que $\rho < 1$, el nuevo tanto instantáneo es mayor, lo cual le supone una experiencia de siniestralidad adversa para el asegurador, ya que el asegurado fallece antes con mayor probabilidad.

Por esta razón, para los seguros con cobertura de fallecimiento, de forma similar al caso de los seguros generales, existe una función de distorsión que resulta en una prima recargada basada en una medida de riesgo que incluye un coeficiente de aversión al riesgo ρ, ya que se comprueba fácilmente que la prima recargada es una función creciente de $\frac{1}{\rho}$.

A partir de la expresión (4.2.1) se especifica la prima recargada para todas y cada una de las leyes de supervivencia definidas en el apéndice 3, para posteriormente analizar el efecto que tiene sobre cada una de ellas el introducir el recargo implícito, y comparar la prima sin recargo con la prima con recargo, aplicado siempre para la modalidad de seguro de vida entera, con capital asegurado de 1 u.m.

4.2.2 Aplicación de las principales leyes de supervivencia para el cálculo de la prima única de riesgo recargada en esta modalidad de seguro vida entera.

4.2.2.1 Cálculo de la prima única de riesgo recargada mediante la “Primera ley de Dormoy”.

La expresión de la función de supervivencia de esta ley (apéndice 3):

$$S(x) = S^x \quad S < 1 \quad x \geq 0$$

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = 1 - \frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}} \int_0^1 \left(S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right) \right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

Se hace el cambio de variable utilizado en el epígrafe 4.1:

$$\int_0^1 \left(S\left(x + \frac{\text{Ln}\, z}{\text{Ln}\, v} \right) \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\int_0^\infty \left(S^{x+t} \right)^{\frac{1}{\rho}} v^t \,\text{Ln}\, v \, dt = -\text{Ln}\, v \int_0^\infty \left(S^x S^t \right)^{\frac{1}{\rho}} v^t dt =$$

$$= -\text{Ln}\, v \int_0^\infty S^{x\frac{1}{\rho}} S^{t\frac{1}{\rho}} v^t dt = -\text{Ln}\, v\, S^{x\frac{1}{\rho}} \int_0^\infty S^{t\frac{1}{\rho}} v^t dt = -\text{Ln}\, v\, S^{x\frac{1}{\rho}} \int_0^\infty \left(S^{\frac{1}{\rho}} v \right)^t dt =$$

$$= -\text{Ln}\, v\, S^{x\frac{1}{\rho}} \left(\frac{\left(S^{\frac{1}{\rho}} v \right)^t}{\text{Ln}\left(S^{\frac{1}{\rho}} v \right)} \right)_0^\infty = \frac{\text{Ln}\, v\, S^{x\frac{1}{\rho}}}{\text{Ln}\, S^{\frac{1}{\rho}} + \text{Ln}\, v}$$

La expresión final de la prima recargada con la ley primera ley de Dormoy queda de la siguiente manera:

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{\text{Ln}\, z}{\text{Ln}\, v} \right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = 1 - \frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}} \int_0^1 \left(S\left(x + \frac{\text{Ln}\, z}{\text{Ln}\, v} \right) \right)^{\frac{1}{\rho}} dz =$$

$$= 1 - \frac{1}{S^{x\frac{1}{\rho}}} \left(\frac{\text{Ln}\, v\, S^{x\frac{1}{\rho}}}{\text{Ln}\, S^{\frac{1}{\rho}} + \text{Ln}\, v} \right) = 1 - \frac{\text{Ln}\, v}{\text{Ln}\, S^{\frac{1}{\rho}} + \text{Ln}\, v} = \frac{\text{Ln}\, S^{\frac{1}{\rho}}}{\text{Ln}\, S^{\frac{1}{\rho}} + \text{Ln}\, v} \tag{4.2.7}$$

No es preciso comprobar que la prima recargada obtenida es superior a la prima sin recargar (prima neta), puesto que este efecto ha quedado visto en la propia definición matemática de ambas primas. Y esto mismo sucede, no sólo al aplicar la primera ley de Dormoy en el cálculo de las mismas, sino también mediante la aplicación de las tres leyes de supervivencia restantes.

En esta ley, las probabilidades de supervivencia unitaria y la complementaria a ésta, con y sin recargo, tienen la siguiente expresión:

$${}_1p_x = S \qquad {}_1q_x = 1 - S$$

$${}_1p_y = S^{\frac{1}{\rho}} \qquad {}_1q_y = 1 - S^{\frac{1}{\rho}}$$

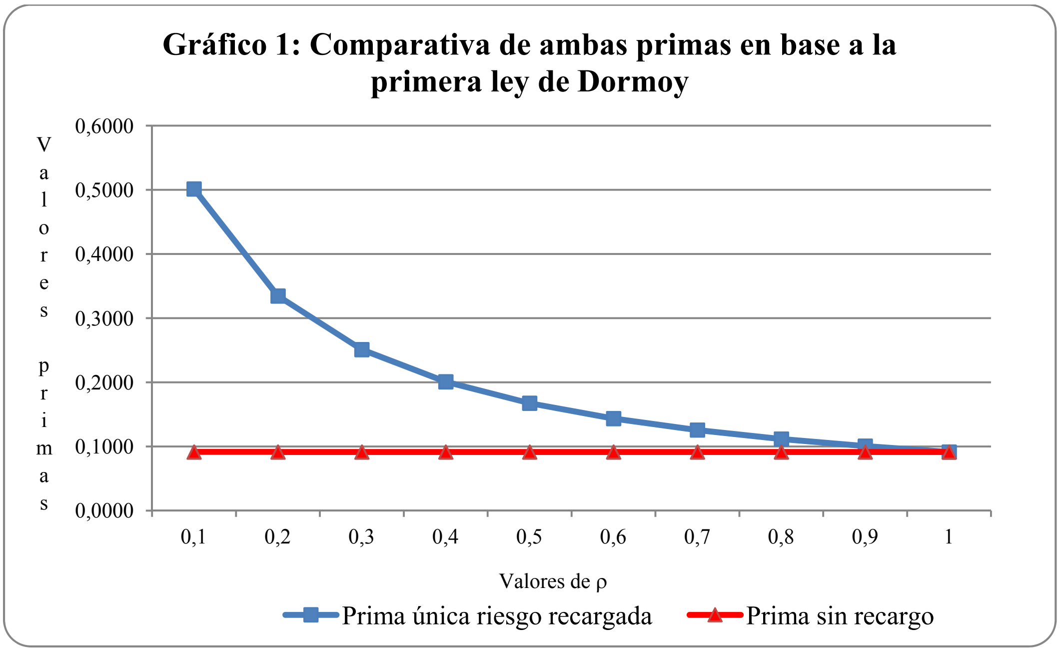
Debido al valor que toma el parámetro ρ menor que la unidad, la probabilidad de supervivencia unitaria disminuye, lo cual implica que la probabilidad de fallecimiento unitaria se incrementa ante la transformada de la función de supervivencia mediante esta función de distorsión de Wang en forma de potencia. Esto justifica que la prima recargada sea mayor, dado que la compañía se tiene que enfrentar a un tanto instantáneo de mortalidad superior, lo cual es económicamente negativo para la ella en una modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento. Es por esta razón por la que si se representa gráficamente el importe de la prima recargada en función del valor que toma el parámetro ρ, el gráfico deberá de ser creciente para cada valor decreciente de ρ, y esto ha de cumplirse para todas y cada una de las leyes de supervivencia empleadas en la práctica en este trabajo de investigación.

La prima recargada obtenida con esta ley y mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia presenta la misma forma que tiene la prima sin recargar, cambiando solamente el parámetro S. En la expresión de la prima recargada se obtiene un parámetro S elevado al exponente de la función de distorsión.

TABLA 3: Comparativa de la prima de riesgo recargada y sin recargar en base a la primera ley de Dormoy

ρ	Prima única Riesgo recargada	Prima única Riesgo sin recargo
0,1	0,5014	0,0914
0,2	0,3346	0,0914
0,3	0,2510	0,0914
0,4	0,2009	0,0914
0,5	0,1674	0,0914
0,6	0,1435	0,0914
0,7	0,1256	0,0914
0,8	0,1117	0,0914
0,9	0,1005	0,0914
1	0,0914	0,0914

Fuente: Elaboración propia. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: Edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, y S=0.999<1. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez, E: Tabla proyectada del año 2.000 de mortalidad española de 1950 a 1990.



Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla 3. En el gráfico se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima pura según disminuye el parámetro ρ, en base la primera ley de Dormoy.

4.2.2.2 Cálculo de la prima única de riesgo recargada mediante la segunda ley de Dormoy

La expresión de la función de supervivencia de esta ley (apéndice 3):

$$S(x) = S_1^{\,x} S_2^{\,x^2} \quad S_1 \, y \, S_2 < 1 \quad x > 0$$

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = 1 - \frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}} \int_0^1 \left[S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right) \right]^{\frac{1}{\rho}} dz$$

$$S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right) = \frac{S_1^{\,x+\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2}}{S_1^x S_2^{x^2}} = S_1^{\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2 + 2x\frac{Lnz}{Lnv}}$$

La misma expresión anterior pero considerando la expresión de la prima recargada es la siguiente:

$$\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}=\left[S_1^{\frac{Lnz}{Lnv}}\,S_2^{\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2+2x\frac{Lnz}{Lnv}}\right]^{\frac{1}{\rho}}=S_1^{\frac{1}{\rho}\frac{Lnz}{Lnv}}\,S_2^{\frac{1}{\rho}\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2}\,S_2^{2x\frac{1}{\rho}\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)}$$

Se hace el cambio de variable expuesto en el epígrafe 4.1:

$$\int_0^1\left(S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}dz=-\int_0^{\infty}S_1^{\frac{1}{\rho}t}\,S_2^{\frac{1}{\rho}t^2}\,S_2^{2x\frac{1}{\rho}t}\,v^t Ln\,v\,dt=-Ln\,v\int_0^{\infty}\left(S_1^{\frac{1}{\rho}}\,S_2^{2x\frac{1}{\rho}}\,v\right)^t S_2^{\frac{1}{\rho}t^2}\,dt \quad (4.2.8)$$

Se resuelve por Maple la integral del estilo:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}a^t b^{t^2}dt=-\frac{1}{Lna+2Lnb}\\&a=S_1^{\frac{1}{\rho}}S_2^{2x\frac{1}{\rho}}v\\&b=S_2^{\frac{1}{\rho}}\end{aligned}\qquad (4.2.9)$$

Sustituyendo la expresión (4.2.9) en la integral (4.2.8), ésta queda resuelta del siguiente modo:

$$\int_0^1\left(S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}dz=Lnv\left(\frac{1}{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}}S_2^{2x\frac{1}{\rho}}v\right)+2LnS_2^{\frac{1}{\rho}}}\right)=\frac{Lnv}{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}}\,S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}v\right)}=$$

$$=\frac{Lnv}{LnS_1^{\frac{1}{\rho}}+Ln\,v+LnS_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}}$$

La prima recargada obtenida con esta ley y mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia presenta la misma forma que tiene la prima sin recargar, cambiando solamente el valor de los parámetros S_1 y S_2.

Se repite lo mismo que ha sucedido con la ley anterior, y es que el efecto que tiene introducir un recargo implícito, con un valor del parámetro ρ menor que la unidad, es un decremento en la probabilidad de supervivencia unitaria, o lo que es lo mismo, un incremento de la probabilidad de fallecimiento unitaria. Esta situación es negativa para la compañía de seguros ante un seguro con cobertura de fallecimiento, y es por ello por lo que se cobrarán primas mayores al asegurado mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, dado que se ha recargado la probabilidad de fallecimiento.

$$
{}_1p_x = S_1 S_2^{2(x+1)} \qquad {}_1q_x = 1 - S_1 S_2^{2(x+1)}
$$

$$
{}_1p_y = S_1^{\frac{1}{\rho}} S_2^{2\frac{1}{\rho}(x+1)} \qquad {}_1q_y = 1 - S_1^{\frac{1}{\rho}} S_2^{2\frac{1}{\rho}(x+1)}
$$

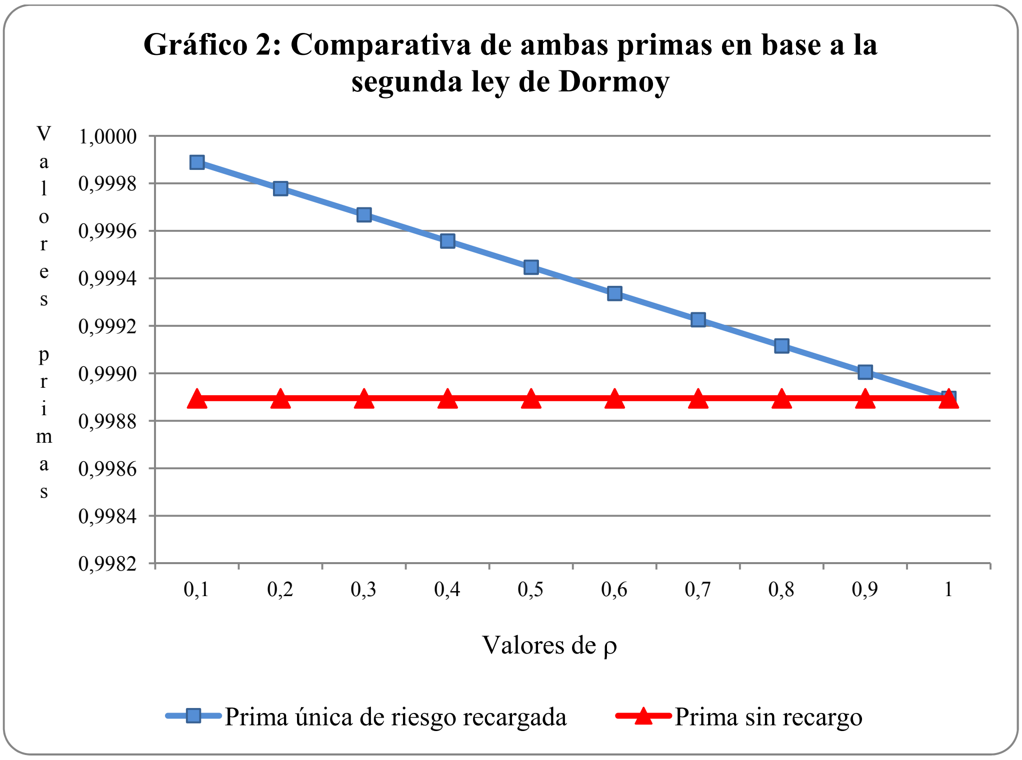
La expresión final de la prima recargada con la segunda ley de Dormoy queda de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
P_{rec} &= 1-\int_0^1 \left(\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz = 1-\frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}}\int_0^1 \left(S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz = \\
&= \frac{LnS_1^{\frac{1}{\rho}} + Lnv - Lnv + LnS_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}}{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}}\, v\, S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right)} = \frac{Ln(S_1^{\frac{1}{\rho}} S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}})}{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}}\, v\, S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right)}
\end{aligned}
\qquad (4.2.10)
$$

TABLA 4: Comparativa de la prima de riesgo recargada y sin recargar en base a la segunda ley de Dormoy

ρ	Prima única Riesgo recargada	Prima única Riesgo sin recargo
0,1	0,9999	0,9989
0,2	0,9998	0,9989
0,3	0,9997	0,9989
0,4	0,9996	0,9989
0,5	0,9994	0,9989
0,6	0,9993	0,9989
0,7	0,9992	0,9989
0,8	0,9991	0,9989
0,9	0,9990	0,9989
1	0,9989	0,9989

Fuente: Elaboración propia. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: Edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, $S_1 = 0,7$, $S_2 = 0,9$, $S = 0,999$, $g = 0,9969$ y $C = 1,1034$. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez, E: Tabla proyectada del año 2.000 de mortalidad española de 1950 a 1990.



Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla 4. En el gráfico se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima pura según disminuye el parámetro ρ, en base a la segunda ley de Dormoy.

4.2.2.3 Cálculo de la prima única de riesgo recargada mediante la ley de Gompertz

La expresión de la función de Supervivencia de esta ley (apéndice 3):

$$S(x)=g^{C^x-1}\ C>1\ g<1\ x>0$$

$$P_{rec}=1-\int_0^1\left(\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{\rho}}dz=1-\frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}}\int_0^1\left(S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}dz$$

$$S_x(t)=g^{C^x\left(C^t-1\right)}=\frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^x}}$$

Se hace el cambio de variable anteriormente expuesto:

$$\int_0^1\left(\frac{g^{C^{x+\frac{Lnz}{Lnv}}}}{g^{C^x}}\right)^{\frac{1}{\rho}}dz=-\int_0^\infty\left(\frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^x}}\right)^{\frac{1}{\rho}}v^tLn\,vdt=-\frac{Ln\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}}\int_0^\infty\left(g^{C^xC^t}\right)^tv^tdt=$$

$$=-\frac{Ln\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}}\int_0^\infty g^{C^xC^t\frac{1}{\rho}}v^tdt=-\frac{Lnv}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}}\int_0^\infty\left(g^{C^x\frac{1}{\rho}}\right)^{C^t}v^td$$

$$d=g^{C^x\frac{1}{\rho}}$$

$$=-\frac{Ln\,v}{d}\int_0^\infty(d)^{C^t}v^tdt=-\frac{Ln\,v}{d}\int_0^\infty\left(d^Cv\right)^tdt=\frac{-Ln\,v}{d}\left[\frac{\left(d^C\,v\right)^t}{Ln\left(d^C\,v\right)}\right]_0^\infty=$$

$$=\frac{Ln\,v}{d\left(Ln\,d^C+Ln\,v\right)}=\frac{Ln\,v}{d\left(C\,Ln\,d+Ln\,v\right)}=$$

$$=\frac{Ln\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C\,Ln\,g^{C^x\frac{1}{\rho}}+Ln\,v\right)}=\frac{Ln\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C\,C^x\frac{1}{\rho}Ln\,g+Ln\,v\right)}=$$

$$=\frac{Ln\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Ln\,g+Ln\,v\right)}$$

Matemáticamente se verifica que, al trabajar con la prima recargada y siendo el parámetro $\rho < 1$, se genera un efecto negativo para la aseguradora en un seguro con cobertura de fallecimiento, tal como se ha explicado con anterioridad.

$$
\begin{aligned}
{}_1p_x &= g^{C^x(C-1)} & {}_1q_x &= 1 - g^{C^x(C-1)} \\
{}_1p_y &= (g^{\frac{1}{\rho}})^{C^x(C-1)} & {}_1q_y &= 1 - (g^{\frac{1}{\rho}})^{C^x(C-1)}
\end{aligned}
$$

La expresión final de la prima recargada con la ley de Gompertz queda de la siguiente manera:

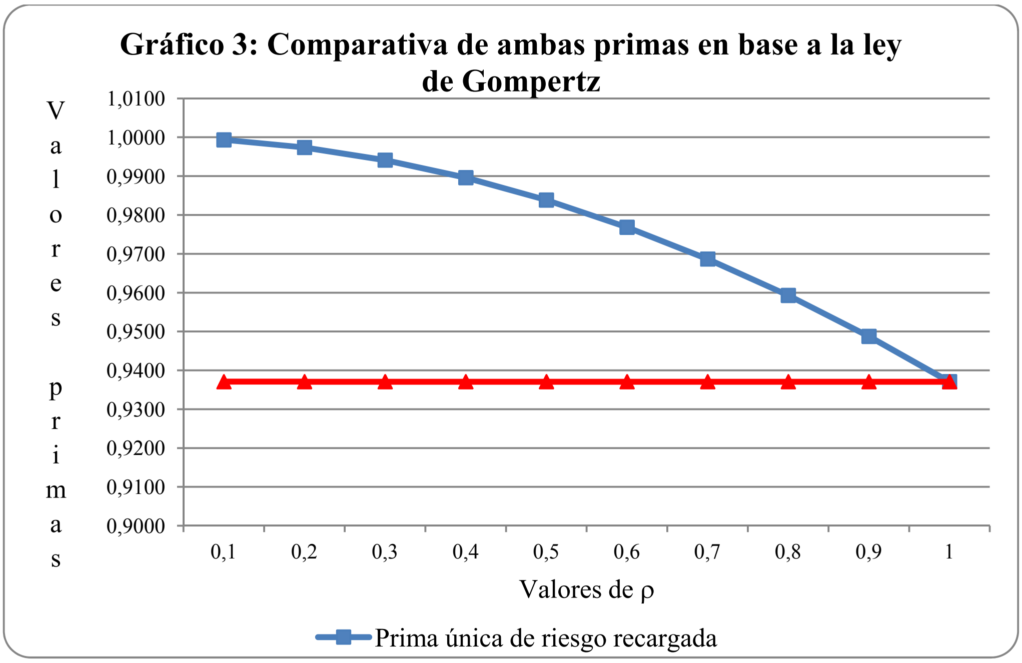
$$
\begin{aligned}
P_{rec} &= 1 - \int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = 1 - \frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}} \int_0^1 \left(S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz = \\
&= \frac{g^{C^x \frac{1}{\rho}} \left(C^{x+1} \frac{1}{\rho} Ln\, g + Ln\, v \right) - Ln\, v}{g^{C^x \frac{1}{\rho}} \left(C^{x+1} \frac{1}{\rho} Ln\, g + Ln\, v \right)}
\end{aligned}
\tag{4.2.11}
$$

La prima recargada obtenida con esta ley y mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia presenta la misma forma que tiene la prima sin recargar, cambiando solamente el valor del parámetro g.

TABLA 5: Comparativa de la prima de riesgo recargada y sin recargar en base a la ley de Gompertz

ρ	Prima única Riesgo recargada	Prima única Riesgo sin recargo
0,1	0,9993	0,9371
0,2	0,9974	0,9371
0,3	0,9941	0,9371
0,4	0,9896	0,9371
0,5	0,9838	0,9371
0,6	0,9768	0,9371
0,7	0,9687	0,9371
0,8	0,9593	0,9371
0,9	0,9488	0,9371
1	0,9371	0,9371

Fuente: Elaboración propia. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: Edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, $S = 0,999$, $g = 0,9969$ y $C = 1,1034$. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez, E: Tabla proyectada del año 2.000 de mortalidad española de 1950 a 1990.



Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla 5. En el gráfico se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima pura según disminuye el parámetro ρ , en base a la ley de Gompertz.

4.2.2.4 Cálculo de la prima única de riesgo recargada mediante la primera ley de Makeham.

La expresión de la función de supervivencia de esta ley (apéndice 3):

$$S(x)=S^{x}g^{C^{x}-1}\quad C>1\quad g<1\quad S<1\quad x>0$$

$$P_{rec}=1-\int_0^1\left(\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{\rho}}dz=1-\frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}}\int_0^1\left(S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}dz$$

$$S_x(t)=\frac{S(x+t)}{S(x)}=\frac{S^{x+t}g^{C^{x+t}-1}}{S^{x}g^{C^{x}-1}}=S^{t}g^{C^{x+t}-C^{x}}=S^{t}g^{C^{x}\left(C^{t}-1\right)}$$

Se hace el mismo cambio de variable que en epígrafe 4.1:

$$\int_0^1\left(\frac{S^{\frac{Lnz}{Lnv}}g^{C^{x}\left(C^{\frac{Lnz}{Lnv}}-1\right)}}{1}\right)^{\frac{1}{\rho}}dz=-\int_0^{\infty}\left(S^{t}g^{C^{x}\left(C^{t}-1\right)}\right)^{\frac{1}{\rho}}v^{t}\,Ln\,vdt=-Lnv\int_0^{\infty}\left(S^{t}g^{C^{x}\left(C^{t}-1\right)}\right)^{\frac{1}{\rho}}v^{t}dt=$$

$$=-Lnv\int_0^{\infty}S^{t\frac{1}{\rho}}\left(\frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^{x}}}\right)^{\frac{1}{\rho}}v^{t}dt=\frac{-Ln\,v}{g^{C^{x}\frac{1}{\rho}}}\int_0^{\infty}S^{t\frac{1}{\rho}}\left(g^{C^{x}C^{t}}\right)^{\frac{1}{\rho}}v^{t}dt=$$

$$=\frac{-Ln\,v}{g^{C^{x}\frac{1}{\rho}}}\int_0^{\infty}S^{t\frac{1}{\rho}}\left(g^{C^{x}\frac{1}{\rho}}\right)^{C^{t}}v^{t}dt$$

$$d=g^{C^{x}\frac{1}{\rho}}$$

$$= -\frac{\mathrm{Ln}\,v}{d}\int_0^\infty S^{t\frac{1}{\rho}} d^{C^t} v^t dt = -\frac{\mathrm{Ln}\,v}{d}\int_0^\infty \left(S^{\frac{1}{\rho}} d^{C^t} v\right)^t dt = -\frac{\mathrm{Ln}v}{d}\left(\frac{\left(S^{\frac{1}{\rho}} d^C v\right)^t}{\mathrm{Ln}\,(S^{\frac{1}{\rho}} d^C v)}\right)_0^\infty =$$

$$= \frac{\mathrm{Ln}\,v}{d\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,S + C\mathrm{Ln}\,d + \mathrm{Ln}\,v\right)} =$$

$$= \frac{\mathrm{Ln}\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,S + C\mathrm{Ln}\,g^{C^x\frac{1}{\rho}} + \mathrm{Ln}\,v\right)} = \frac{\mathrm{Ln}\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,S + C^{x+1}\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,g + \mathrm{Ln}\,v\right)}$$

$$_1p_x = Sg^{C^x(C-1)} \qquad _1q_x = 1 - Sg^{C^x(C-1)}$$

$$_1p_y = S^{\frac{1}{\rho}}(g^{\frac{1}{\rho}})^{C^x(C-1)} \qquad _1q_y = 1 - S^{\frac{1}{\rho}}(g^{\frac{1}{\rho}})^{C^x(C-1)}$$

La expresión final de la prima recargada con la primera ley de Makeham queda de la siguiente manera:

$$P_{rec} = 1 - \int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{\mathrm{Ln}\,z}{\mathrm{Ln}\,v}\right)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz = 1 - \frac{1}{S(x)^{\frac{1}{\rho}}}\int_0^1 \left(S\left(x + \frac{\mathrm{Ln}\,z}{\mathrm{Ln}\,v}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz =$$

$$= 1 - \frac{\mathrm{Ln}\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,S + C^{x+1}\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,g + \mathrm{Ln}\,v\right)} = \qquad (4.2.12)$$

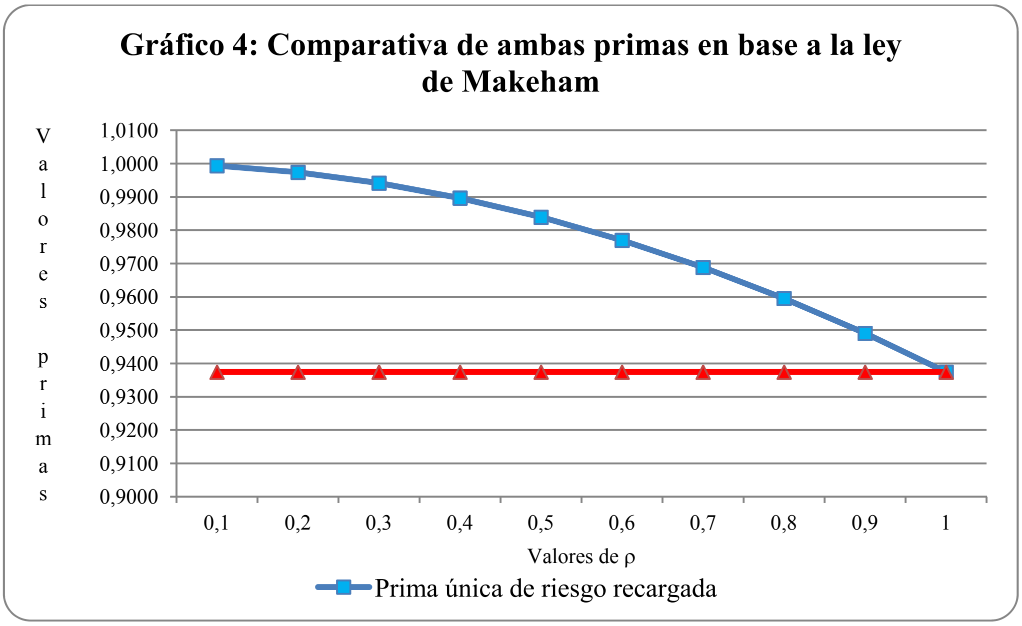
$$= \frac{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,S + C^{x+1}\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,g + \mathrm{Ln}\,v\right) - \mathrm{Ln}\,v}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,S + C^{x+1}\frac{1}{\rho}\mathrm{Ln}\,g + \mathrm{Ln}\,v\right)}$$

La prima recargada por aplicación de esta ley muestra que dicha prima coincide con la prima pura de otra primera ley de Makeham con parámetros modificados $S^{\frac{1}{\rho}}$, $g^{\frac{1}{\rho}}$ y C.

TABLA 6: Comparativa de la prima de riesgo recargada y sin recargar en base a la ley de Makeham

ρ	Prima única Riesgo recargada	Prima única Riesgo sin recargo
0,1	0,9993	0,9374
0,2	0,9974	0,9374
0,3	0,9941	0,9374
0,4	0,9897	0,9374
0,5	0,9839	0,9374
0,6	0,9770	0,9374
0,7	0,9688	0,9374
0,8	0,9595	0,9374
0,9	0,9490	0,9374
1	0,9374	0,9374

Fuente: Elaboración propia. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: Edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, $S = 0,999$, $g = 0,9969$ y $C = 1,1034$. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez, E: Tabla proyectada del año 2.000 de mortalidad española de 1950 a 1990.



Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla 6. En el gráfico se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima pura según disminuye el parámetro ρ, en base a la ley de Makeham.

4.2.3 Tabla Resumen de las primas únicas de riesgo recargadas para cada una de las leyes de Supervivencia anteriormente empleadas para un Seguro Vida entera.

Se muestra una relación de la prima única de riesgo recargada a partir de la función de distorsión de Wang, calculada mediante el empleo de las funciones de supervivencia de la edad de fallecimiento más habituales en la práctica.

TABLA 7: Resumen de las primas únicas de riesgo recargadas

Leyes Supervivencia	**Prima Única de Riesgo**
Primera Ley de Dormoy	$P_{rec} = \dfrac{LnS^{\frac{1}{\rho}}}{LnS^{\frac{1}{\rho}} + Lnv}$
Segunda Ley de Dormoy	$P_{rec} = \dfrac{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}} S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right)}{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}} v\, S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right)}$
Ley de Gompertz	$P_{rec} = \dfrac{g^{C^x \frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right) - Lnv}{g^{C^x \frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right)}$
Ley de Makeham	$P_{rec} = \dfrac{g^{C^x \frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}LnS + C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right) - Lnv}{g^{C^x \frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}LnS + C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right)}$

Fuente: Elaboración propia. Tabla que muestra las primas únicas de riesgo recargadas, calculadas a partir de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, con cada una de las leyes de supervivencia explicadas en el Apéndice 3.

4.3 Comparativa entre la prima ún ica de riesgo recargada y la prima única de riesgo sin recargar para un seguro vida entera.

TABLA 8: Resumen de las primas únicas de riesgo, netas y recargadas

LEYES SUPERVIVENCIA	**Prima única Riesgo sin recargar**	**Prima única riesgo recargada mediante función distorsión Wang**
Primera ley de Dormoy	$P=\frac{LnS}{LnS+Lnv}$	$P_{rec}=\frac{LnS^{\frac{1}{\rho}}}{LnS^{\frac{1}{\rho}}+Lnv}$
Segunda ley de Dormoy	$P=\frac{LnS_1+(2x+2)LnS_2}{LnS_1+Lnv+(2x+2)LnS_2}$	$P_{rec}=\frac{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}}S_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right)}{Ln\left(S_1^{\frac{1}{\rho}}vS_2^{2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right)}$
Ley de Gompertz	$P=\frac{g^{C^x}\left(C^{x+1}Lng+Lnv\right)-Lnv}{g^{C^x}\left(C^{x+1}Lng+Lnv\right)}$	$P_{rec}=\frac{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng+Lnv\right)-Lnv}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng+Lnv\right)}$
Primera ley de Makeham	$P=\frac{g^{C^x}\left(LnS+Lnv+C^{x+1}Lng\right)-Lnv}{g^{C^x}\left(LnS+Lnv+C^{x+1}Lng\right)}$	$P_{rec}=\frac{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}LnS+C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng+Lnv\right)-Lnv}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}LnS+C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng+Lnv\right)}$

Fuente: Elaboración propia. Comparativa de las primas únicas de riesgo sin recargar y recargadas implícitamente a través de la función de distorsión de Wang en forma de potencia.

La conclusión más importante que se obtiene es que la función de distorsión de Wang en su forma de potencia, que es la que se ha empleado en esta tesis como método alternativo de tarificación en vida, es una medida de riesgo coherente, dado que para el valor del parámetro $\rho < 1$ verifica las cuatro propiedades consideradas como deseables, incluyendo la de subaditividad (demostrada ésta última en el capítulo actual del presente trabajo, epígrafe 4.2). Y ésta es una de las aportaciones importantes de este trabajo de tesis, puesto que Wang (1996) demostró que la propiedad de subaditividad sólo se cumplía para el caso que el parámetro ρ fuera mayor que 1, que es justo coincidente con los valores que se han asignado en este trabajo al parámetro para un seguro de vida con cobertura de supervivencia (seguro de rentas).

Si se centra ahora la atención en analizar todas y cada una de las leyes de supervivencia con las que se ha estado trabajando se comprueba que el exponente de la función de distorsión, $\frac{1}{\rho}$, afecta de manera proporcional al tanto instantáneo de mortalidad, lo cual hace que la prima recargada sea mayor que la prima sin recargar, dependiendo de los valores que adopte ρ. Es importante señalar que los valores que se han asignado al parámetro ρ en este trabajo de investigación son valores seleccionados arbitrariamente, con el único requisito que dicho parámetro ha de ser mayor que cero (Wang, (1995)) pero menor que la unidad para esta modalidad de seguro para permitir obtener una prima recargada superior a la prima sin recargar.

La asignación de los valores numéricos a dicho parámetro es uno de los puntos objeto de futura línea de investigación, dado que no se han seguido criterios de solvencia y aversión al riesgo para su selección. No obstante se ha considerado la recomendación realizada por SOLVENCIA II en el documento QIS5, que dice que el valor del parámetro se recomienda sea de 0.15 para esta modalidad de seguro. Para este seguro, el vida entera, se han tomado valores del parámetro ρ que oscilan desde 1 hasta 0.1, con disminuciones de valor 0.1. Con estos valores asignados a ρ lo que se ha pretendido es demostrar, tanto matemática como gráficamente que la prima recargada obtenida mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia es superior a la prima sin recargar.

Ha de ser cada compañía individualmente considerada la que estime, en base a sus necesidades de solvencia y nivel de aversión al riesgo que presente, que valores son los más adecuados a asignar al parámetro ρ, cumpliendo con el requisito que dicho parámetro ha de tomar un valor menor que la unidad para esta modalidad de seguro.

Con respecto a la primera ley de Dormoy, al trabajar con la función de distorsión de Wang en forma de potencia, se modifica el valor del parámetro S, que es menor que la unidad, haciendo que la probabilidad de fallecimiento se incremente, por lo que disminuye la probabilidad de supervivencia. Esto redunda en que la prima recargada es mayor que la prima sin recargar. Pero esto sucede sin que cambie la expresión de la ley, sólo cambia el valor del parámetro S.

$$\begin{aligned} \mu_x &= -LnS \\ \mu_y &= -LnS^{\frac{1}{\rho}} = -\frac{1}{\rho}LnS = \frac{1}{\rho}\mu_x \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

El efecto que tiene el exponente de la función de distorsión sobre el tanto instantáneo de mortalidad es proporcional. La prima recargada que se genera coincide con la prima pura de otra variable duración de vida hasta el fallecimiento que sigue a la primera ley de Dormoy con parámetro $S^{\frac{1}{\rho}}$ y tanto instantáneo de mortalidad proporcional al de la variable original X.

Con respecto a la segunda ley de Dormoy, el hecho de emplear la función de distorsión de Wang en forma de potencia para calcular la prima única de riesgo vuelve a modificar el valor de los dos parámetros S_1 y S_2, ambos menores que la unidad, originando el mismo efecto que la anterior ley en las probabilidades, tanto de fallecimiento como de supervivencia. El exponente de la función de distorsión sólo modifica el valor de los parámetros, pero la ley permanece invariante ante el hecho de recargar la prima de manera implícita. Y el efecto que va a tener sobre el tanto instantáneo de mortalidad es el mismo de antes: proporcional al tanto instantáneo de la variable original X.

$$\begin{aligned} \mu_x &= -2x \mathrm{Ln} S_2 - \mathrm{Ln} S_1 \\ \mu_y &= -2x \frac{1}{\rho} \mathrm{Ln} S_2 - \frac{1}{\rho} \mathrm{Ln} S_1 = \frac{1}{\rho}\left(-2x \mathrm{Ln} S_2 - \mathrm{Ln} S_1\right) = \frac{1}{\rho}\mu_x \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Analizando la ley de Gompertz, el exponente de la función de distorsión empleada afecta al valor del parámetro g, el cual es menor que la unidad, generando el mismo efecto que las leyes anteriores, esto es, un incremento de la probabilidad de fallecimiento y un decremento de la de supervivencia, redundando pues en una prima recargada mayor que si no se recarga de manera implícita. Pero la ley sigue siendo invariante ante el empleo de dicha función de distorsión.

$$\begin{aligned} \mu_x &= -\mathrm{Ln} g \; \mathrm{Ln} C \; C^x \\ \mu_y &= -\mathrm{Ln} g^{\frac{1}{\rho}} \mathrm{Ln} C \; C^x = \frac{1}{\rho}\left(-\mathrm{Ln} g \; \mathrm{Ln} C \; C^x\right) = \frac{1}{\rho}\mu_x \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

La prima recargada coincide con la prima pura de otra variable duración de vida hasta el fallecimiento que sigue a una ley de Gompertz de parámetros C y $g^{\frac{1}{\rho}}$. El tanto instantáneo de la nueva variable Y es proporcional al de la variable inicial X, siendo el exponente de la función de distorsión el factor de proporcionalidad.

Y por último la primera ley de Makeham. Como en esta ley se trabaja con dos parámetros, g y S, ambos menores que la unidad, el efecto que tiene el cálculo de la prima única de riesgo mediante la función de distorsión de Wang es exactamente el mismo que con las leyes anteriores. La ley sigue siendo invariante ante el empleo de dicha función de distorsión, modificándose exclusivamente los parámetros. El modelo, pues, no se modifica, sigue siendo un modelo Gompertz o un modelo Makeham. La prima recargada obtenida coincide con la prima pura de la ley de Makeham con parámetros $S^{\frac{1}{\rho}}$, $g^{\frac{1}{\rho}}$ y C.

$$\begin{aligned} \mu_x &= -\mathrm{Ln} S - \mathrm{Ln} g \, \mathrm{Ln} C \, C^x \\ \mu_y &= -\mathrm{Ln} S^{\frac{1}{\rho}} - \mathrm{Ln} g^{\frac{1}{\rho}} \mathrm{Ln} C \, C^x = \frac{1}{\rho}\left(-\mathrm{Ln} S - \mathrm{Ln} g \, \mathrm{Ln} C \, C^x\right) = \frac{1}{\rho}\mu_x \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Por tanto, las primas recargadas obtenidas a partir de la función de distorsión de Wang en forma de potencia no modifican la expresión de la ley, sólo hacen que cambie el valor de los parámetros, generando un efecto proporcional en el tanto instantáneo de mortalidad, exactamente el mismo que se genera en el ramo no vida asegurador.

Se concluye pues que las leyes de supervivencia aplicadas en este estudio para el ramo de vida en la modalidad de un seguro vida entera (cobertura de fallecimiento) son invariantes ante el exponente de la función de distorsión de Wang, siendo el parámetro $\rho < 1$.

Capítulo Quinto. Ta rificación, para caso continuo, de un seguro de supervivencia (modalidad seguro de rentas vitalicio).

5.1. Obtención de la prima única de riesgo a partir del principio d e equivalencia actuarial. Planteamiento General.

Del mismo modo que se ha hecho en el capítulo anterior para un seguro con cobertura de fallecimiento, se va a expresar la prima única de riesgo para un seguro con cobertura de supervivencia, el seguro de rentas, a partir del método clásico de tarificación (principio del valor esperado). Se caracteriza por el hecho de que el asegurador se compromete, al final de un plazo de diferimiento pactado en la póliza, a pagar al asegurado y mientras viva una renta periódica (Bowers et al, (1997)). Para tener derecho a estas cuantías el asegurado ha de comenzar a abonar a la compañía el importe de las primas, bien sean periódicas o a prima única, en la fecha de suscripción del contrato de seguro. En este caso la variable aleatoria es la variable vida residual o tiempo que queda por vivir a partir de la edad x, T_x.

Se van a considerar los siguientes supuestos para esta modalidad de seguro de rentas:

- La compañía abona al asegurado 1 u.m. mientras el asegurado esté vivo.
- El tipo de interés técnico es i.
- Dada la variable aleatoria continua edad de fallecimiento del recién nacido de edad X, con función de supervivencia $S(x)$, la variable aleatoria T_x, vida residual o tiempo que queda por vivir a partir de la edad x, tiene una función de distribución que se denomina $G_x(t)$ y una función de supervivencia $S_x(t)$, cuyas expresiones en funciones de $S(x)$ vienen expresadas en el capítulo anterior.

La expresión general de la prima para esta modalidad de seguro es (Bowers et al, (1997)):

$P=\int_0^\infty v^t\left(1-G_x(t)\right)dt$, donde $G_x(t)$ es la función de distribución del tiempo transcurrido desde la contratación de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado, es decir, la vida residual.

$$ {}_t p_x = P\left(X > x+t / X > x\right) = 1 - G_x(t) = S_x(t) $$

$$ P=\int_0^\infty v^t(1-G_x(t))dt=\int_0^\infty v^t {}_t p_x\,dt=\int_0^\infty v^t S_x(t)dt $$

Haciendo el cambio de variable:

$$ v^t = z; $$
$$ t\,\mathrm{Ln}\,v = \mathrm{Ln}\,z $$
$$ t = \frac{\mathrm{Ln}\,z}{\mathrm{Ln}\,v} $$

Si $t = 0$, entonces $v^0 = 1$. La variable z tomará el valor 1.

Si $\lim_{t\to\infty} v^t = 0$, la variable z tomará el valor 0 puesto que el factor v es menor que la unidad.

Por lo tanto se tiene:

$$ P=\int_0^\infty v^t S_x(t)dt = P=\int_1^0 z\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}\frac{1}{zLnv}dz=-\int_0^1 zS_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\frac{dz}{zLnv} \qquad (5.1.1) $$

Integrando por partes, del mismo modo que se ha hecho en el capítulo cuarto, epígrafe 4.1, se obtiene:

$$ P=-\frac{1}{Lnv}\int_0^1 S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)dz \qquad (5.1.2) $$

De este modo se ha conseguido expresar la prima única de riesgo de un seguro de rentas con capital asegurado de 1 u.m si el asegurado sobrevive en cada período en términos de la función de supervivencia de la variable vida residual.

Igualmente se puede expresar la prima anteriormente calculada en función de la función de supervivencia de la variable edad de fallecimiento X:

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}dz \tag{5.1.3}$$

Lo que se va a realizar a continuación es llevar a cabo el proceso de tarificación para esta modalidad de seguro con prestación garantizada de 1 u.m. en el caso continuo para la ley de supervivencia primera ley de Dormoy. Para las otras tres leyes restantes (segunda de Dormoy, Gompertz y Makeham), se muestra el desarrollo matemático en el apéndice 4. El fin que se busca es comparar estas primas con las primas que se obtendrán más adelante con la función de distorsión.

5.1.1 Aplicación de la primera ley de Dormoy para el cálculo de la prima única en esta modalidad de seguro.

La expresión matemática de la función de supervivencia de la edad de fallecimiento es la siguiente (apéndice 3):

$$S(x) = S^x \quad S < 1$$

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}dz$$

Aplicándose el cambio de variable establecido anteriormente ($v^t = z$), queda:

$$S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)=\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}=\frac{S^{x+\frac{Lnz}{Lnv}}}{S^x}=S^{\frac{Lnz}{Lnv}}$$

$$P=-\frac{1}{Lnv}\int_0^1 S^{\frac{Lnz}{Lnv}}dz=-\frac{1}{Lnv}\int_\infty^0 S^t v^t Lnvdt=\int_0^\infty S^t v^t dt=\int_0^\infty (Sv)^t dt=$$

$$=\left(\frac{1}{Ln(Sv)}(Sv)^t\right)_0^\infty=-\frac{1}{LnS+Lnv} \qquad (5.1.4)$$

$$P=-\frac{1}{LnS+Lnv}>0$$

Es una prima mayor que cero dado que el parámetro $S<1$, $LnS<0$ y $Lnv<0$.

5.1.2 Tabla resumen de las primas únicas de riesgo para cada una de las leyes de supervivencia anteriormente empleadas para un seguro de rentas.

A continuación se muestra una relación de la prima única de riesgo calculada para la modalidad del seguro de vida llamado seguro de rentas mediante el empleo de las funciones de supervivencia de la edad de fallecimiento más habituales en la práctica. Es preciso que quede clara la idea que se pretende mostrar en este capítulo, y es hacer lo análogo a lo hecho en el capítulo cuarto, pero aplicado ahora a un seguro de rentas. Se trata de poder recargar de manera implícita la prima modificando la función de supervivencia, a través de la función de distorsión de Wang.

TABLA 9: Resumen de las primas únicas de riesgo

Leyes Supervivencia	**Prima Única de Riesgo**
Primera Ley de Dormoy	$P = -\dfrac{1}{\text{LnS} + \text{Lnv}}$
Segunda Ley de Dormoy	$P = \dfrac{-1}{\text{LnS}_1 + (2x+2)\text{LnS}_2 + \text{Lnv}}$
Ley de Gompertz	$P = \dfrac{-1}{g^{C^x}\left(C^{x+1}\text{Lng} + \text{Lnv}\right)}$
Ley de Makeham	$P = \dfrac{-1}{g^{C^x}\left(\text{LnS} + C^{x+1}\text{Lng} + \text{Lnv}\right)}$

Fuente: Elaboración propia. Tabla que relaciona las primas únicas de riesgo, calculadas por aplicación del principio de equivalencia actuarial, con cada una de las leyes de supervivencia explicadas en el Apéndice 3.

5.2 Tarificación de la prima única de riesgo recargada a partir de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia. Planteamiento general.

Lo que se pretende mostrar en este capítulo es el efecto que tiene modificar la función de supervivencia para un seguro de rentas, así como la variación que tendrá el parámetro ρ en esta modalidad de seguro.

La función $g\left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}}$ es lo que se ha llamado función de supervivencia ajustada al riesgo, y la forma que se va a emplear de función de distorsión es, como ya se ha hecho en el capítulo anterior, la de potencia. (Wang, (1996)).

$g\left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, con valores del parámetro $\rho \geq 1$.

La prima única de riesgo de un seguro de rentas con capital asegurado de 1 u.m. y en términos de la función de supervivencia de la variable vida residual es la que se ha calculado en el epígrafe 5.1:

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)dz$$

La prima anteriormente calculada en términos de la función de supervivencia de la variable edad de fallecimiento:

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}dz$$

A partir de la expresión matemática anteriormente obtenida, si tomamos la función de distorsión en su forma de potencia para tarificar, hacemos lo análogo a lo que hizo Wang en el campo continuo del ramo de no vida, pero aplicado a un seguro de rentas.

$$P_{rec} = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx$$

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv} \right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv} \right) \right)^{\frac{1}{\rho}} dz, \quad \rho \geq 1 \qquad (5.2.1)$$

Para que la prima recargada sea mayor que la prima neta, el parámetro ρ deberá ser mayor que la unidad, ya que en este caso, cuanto mayor sea el valor del parámetro, mayor será el integrando. Dicho de otro modo, en un seguro con cobertura de supervivencia, a la compañía aseguradora le interesa que el asegurado fallezca lo antes posible para así no tener que abonarle la prestación cubierta en la póliza. Luego interesa que el tanto instantáneo de mortalidad sea lo más alto posible. Si se considera un tanto menor se recarga la prima[8] ($\rho > 1$), luego la prima recargada será mayor, puesto que la compañía cobrará más dinero a los asegurados al presentar éstos un tanto instantáneo de mortalidad inferior. De este modo la función de distorsión da más peso a la cola de la variable vida residual, obteniéndose a partir de ella una prima recargada.

Al ser el parámetro $\rho \geq 1$, esta esperanza distorsionada cumple las propiedades de una medida de riesgo coherente (Wang, (1995))[9], inclusive la de subaditividad. Esta propiedad ha sido demostrada por Wang (1995) y citada en este trabajo, en el capítulo tercero, epígrafe 3.4.

Cuando se verifica que ρ es mayor que la unidad, el nuevo tanto instantáneo de mortalidad de la nueva variable será menor que el tanto instantáneo de la variable

[8] Referencia a la ecuación (3.4.2), donde se refleja que la prima recargada coincide con la prima pura obtenida para una variable inicial, pero con un factor de proporcionalidad $\frac{1}{\rho}$.

[9] Demostrada la propiedad de subaditividad por Wang para el caso de que el coeficiente de aversión al riesgo sea $\rho \geq 1$, a partir de un seguro general y para un seguro de vida con cobertura de supervivencia. Recordemos que una de las aportaciones de esta tesis es la demostración de que esta propiedad de subaditividad también se verifica para el caso de que $\rho \leq 1$, realizada en el capítulo cuarto, Teorema 1, página 78.

inicial X, tal como se indica en la expresión (3.4.4), lo que implica una experiencia de siniestralidad adversa para la compañía de seguros, ya que el asegurado vive durante más tiempo, con una mayor probabilidad. Por esta razón la prima recargada es mayor que la prima única de riesgo sin recargar implícitamente.

A partir de esta expresión (5.2.1) se va a calcular la prima única de riesgo recargada para las leyes de supervivencia anteriormente definidas, para posteriormente analizar el efecto que tiene, tanto a nivel general como sobre cada una de ellas el modificar la función de supervivencia a través de una función de distorsión en forma de potencia, y comparar la prima sin recargo con la prima recargada, aplicado siempre para la modalidad de seguro de rentas.

5.2.1 Prima recargada y nuevo tanto instantáneo.

La prima recargada implícitamente y ya definida en (5.2.1) verifica que se ha obtenido a través de la transformada proporcional del tanto instantáneo. A continuación se muestra la justificación matemática de dicha afirmación.

TEOREMA 3:

La prima recargada obtenida en (5.2.1) coincide con la prima pura de otra variable, con el mismo modelo de ley de supervivencia, pero con un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al tanto instantáneo de la variable X, siendo el factor de proporcionalidad el exponente de la función de distorsión, esto es, el cociente $\frac{1}{\rho}$.

Demostración:

Se parte de la expresión siguiente

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

Integrando por partes, tal como se ha hecho en el capítulo cuarto, epígrafe 4.2.1, y haciendo el cambio de variable $z = v^t$, se tiene:

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_{\infty}^{0}\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}} v^t Lnv\, dt = \int_{0}^{\infty} v^t \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}} dt \tag{5.2.2}$$

Llamando a $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, la expresión final de la prima recargada es:

$$P_{rec} = \int_{0}^{\infty} v^t \left(S_Y(t)\right) dt \tag{5.2.3}$$

Se llega así al final de la demostración.

La nueva expresión de prima obtenida se corresponde a la prima única de un seguro de la misma modalidad (seguro de rentas) pero para una nueva variable aleatoria llamada Y, cuya función de supervivencia adopta la forma siguiente $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$.

La expresión del tanto instantáneo de la variable Y es la misma que la obtenida en (4.2.6).

Ocurre exactamente lo mismo que en la modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento, y es que a nivel general y mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia se verifica que el cociente $\frac{1}{\rho}$ es la constante de proporcionalidad en el tanto instantáneo de mortalidad, siendo, como ya se ha comentado con anterioridad este factor de proporcionalidad el exponente de la función de distorsión empleada (en forma de potencia).

En concreto, cuando se toma $\rho > 1$, el nuevo tanto instantáneo es menor, lo cual supone una experiencia de siniestralidad adversa para el asegurador, ya que el asegurado fallece más tarde con mayor probabilidad.

Por esta razón, para los seguros con cobertura de supervivencia, existe una función de distorsión similar a los seguros generales, resultando una prima recargada basada en una medida de riesgo coherente que incluye un coeficiente de aversión al riesgo ρ, ya que se comprueba fácilmente que la prima recargada es una función creciente de ρ.

A partir de la expresión (5.2.1) se va a aplicar la prima recargada para todas y cada una de las leyes de supervivencia definidas en el apéndice 3, para posteriormente analizar el efecto que tiene sobre cada una de ellas el introducir el recargo implícito, y comparar la prima sin recargo con la prima recargada, aplicado siempre para la modalidad de seguro de rentas, con capital asegurado de 1 u.m.

5.2.2 Aplicación de las principales leyes de supervivencia para el cálculo de la prima única de riesgo recargada en esta modalidad de seguro de rentas.

5.2.2.1 Cálculo de la prima única de riesgo recargada mediante la ley de supervivencia "Primera ley de Dormoy".

Recordemos la expresión de la función de supervivencia de esta ley (apéndice 3):

$$S(x) = S^x \quad S < 1 \quad x \geq 0$$

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv} \right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv} \right) \right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

Se hace el cambio de variable expuesto en el capítulo cuarto:

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv} \right) \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{Lnv}\int_\infty^0 S^{\frac{1}{\rho}t} v^t Lnv\, dt = \int_0^\infty \left(S^{\frac{1}{\rho}} v \right)^t dt =$$

$$= \left(\frac{\left(S^{\frac{1}{\rho}} v \right)^t}{Ln(S^{\frac{1}{\rho}} v)} \right)_0^\infty$$

La expresión final de la prima recargada con la ley primera ley de Dormoy queda de la siguiente manera:

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{LnS^{\frac{1}{\rho}} + Lnv} \qquad (5.2.4)$$

En esta ley, $S = {}_1p_x$, es decir, la probabilidad de que un asegurado de edad actuarial x sobreviva un año. Debido a la función de distorsión, la probabilidad de sobrevivir es mayor (dado que S es un número menor que la unidad, elevado a un número $\frac{1}{\rho}$ que es también menor que la unidad). Y esto es negativo para la compañía ante un seguro de rentas, de modo que cobrará una prima más alta, como si se recargase la probabilidad de supervivencia. Es por esta razón por la que si se representa gráficamente el importe de la prima recargada en función del valor que toma el parámetro ρ, el gráfico deberá de ser creciente para cada valor creciente de ρ, y esto ha de cumplirse para todas y cada una de las leyes de supervivencia empleadas en la práctica en este trabajo de investigación.

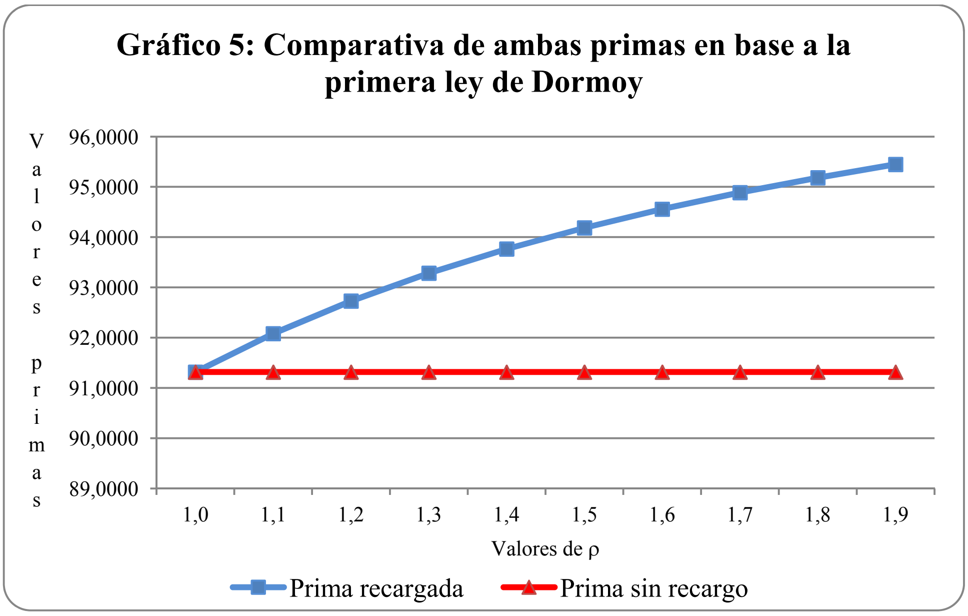
La prima recargada obtenida con esta ley y mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia presenta la misma forma que tiene la prima sin recargar, cambiando solamente el parámetro S, lo mismo que sucedía en el seguro con cobertura de fallecimiento. En esta expresión de la prima recargada se obtiene un parámetro S elevado al exponente de la función de distorsión.

De la misma manera que sucedía en el seguro vida entera, en esta modalidad tampoco es preciso comprobar que la prima recargada obtenida es superior a la prima sin recargar (prima neta), puesto que este efecto ha quedado visto en la propia definición matemática de ambas primas. Y esto mismo ocurre, no sólo al aplicar la primera ley de Dormoy en el cálculo de las mismas, sino también mediante la aplicación de las tres leyes de supervivencia restantes.

TABLA 10: Comparativa de la prima de riesgo recargada y sin recargar en base a la primera ley de Dormoy

ρ	Prima única Riesgo recargada	Prima única Riesgo sin recargo
1	91,3173	91,3173
1,1	92,0821	91,3173
1,2	92,7293	91,3173
1,3	93,2840	91,3173
1,4	93,7649	91,3173
1,5	94,1856	91,3173
1,6	94,5569	91,3173
1,7	94,8869	91,3173
1,8	95,1822	91,3173
1,9	95,4480	91,3173

Fuente: Elaboración propia. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: Edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, y S=0.999<1. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez, E: Tabla proyectada del año 2.000 de mortalidad española de 1950 a 1990.



Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla 10. En el gráfico se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima pura según aumenta el parámetro ρ, en base a la primera ley de Dormoy.

5.2.2.2 Cálculo de la prima única de riesgo recargada mediante la segunda ley de Dormoy

La expresión de la función de supervivencia de esta ley (apéndice 3):

$$S(x) = S_1^x S_2^{x^2}$$
$$S_1 < 1$$
$$S_2 < 1$$
$$x > 0$$

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

$$S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right) = \frac{S_1^{x+\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2}}{S_1^x S_2^{x^2}} = S_1^{\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2 + 2x\frac{Lnz}{Lnv}}$$

La misma expresión anterior pero considerando la expresión de la prima recargada es la siguiente:

$$\left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} = \left(S_1^{\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{(\frac{Lnz}{Lnv})^2 + 2x\frac{Lnz}{Lnv}} \right)^{\frac{1}{\rho}} = S_1^{\frac{1}{\rho}\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{\frac{1}{\rho}\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2} S_2^{2x\frac{1}{\rho}\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)}$$

Se hace el cambio de variable expuesto en el epígrafe 4.1:

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz =$$
$$= \frac{1}{Lnv}\int_0^\infty S_1^{\frac{1}{\rho}t} S_2^{\frac{1}{\rho}t^2} S_2^{2x\frac{1}{\rho}t} v^t Lnv \, dt = \int_0^\infty \left(S_1^{\frac{1}{\rho}} S_2^{2x\frac{1}{\rho}} v \right)^t S_2^{\frac{1}{\rho}t^2} dt$$

Se asignan los valores a los parámetros a y b:

$$\int_0^{\infty} a^t b^{t^2} dt = -\frac{1}{Lna + 2Lnb}$$

$$a = S_1^{\frac{1}{\rho}} S_2^{2x\frac{1}{\rho}} v$$

$$b = S_2^{\frac{1}{\rho}}$$

La prima recargada obtenida con esta ley y mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia presenta la misma forma que tiene la prima sin recargar, cambiando solamente el valor de los parámetros S_1 y S_2 .

De nuevo observamos lo mismo que con la anterior ley, y es que el efecto que tiene la función de distorsión, con un valor del parámetro ρ mayor que la unidad, es un incremento en la probabilidad de supervivencia unitaria, o lo que es lo mismo, un decremento de la probabilidad de fallecimiento unitaria. Esta situación es negativa para la compañía de seguros en un seguro con cobertura de supervivencia, y es por esto por lo que se cobrarán primas mayores al asegurado mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, dado que se ha recargado la probabilidad de supervivencia.

$${}_1p_x = S_1 S_2^{2(x+1)}$$

$$S_1 < 1$$

$$S_2 < 1$$

$${}_1p_y = S^{\frac{1}{\rho}}{}_1 S_2^{\frac{1}{\rho}2(x+1)} > {}_1p_x$$

La expresión final de la prima recargada con la ley segunda ley de Dormoy queda de la siguiente manera:

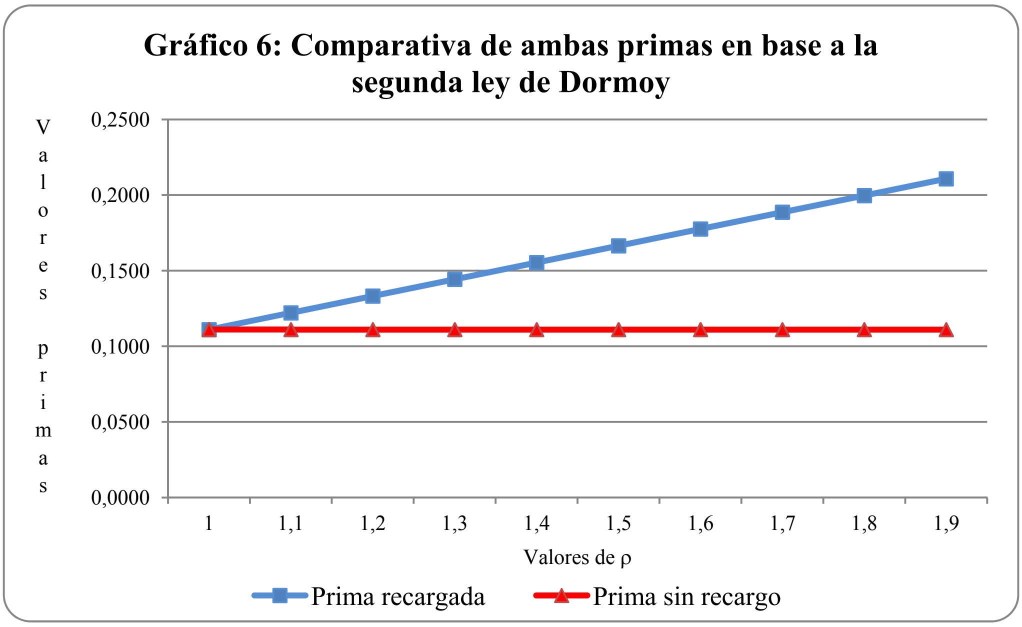
$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = \frac{-1}{Ln\left(S_1^{\,r} v\, S_2^{\,2(x+1)\frac{1}{\rho}}\right) + 2\, LnS_2^{\,\frac{1}{\rho}}} = \tag{5.2.5}$$

$$= \frac{-1}{LnS_1^{\,\frac{1}{\rho}} + Lnv + LnS_2^{\,2\frac{1}{\rho}(x+1)}}$$

TABLA 11: Comparativa de la prima de riesgo recargada y sin recargar en base a la segunda ley de Dormoy

ρ	Prima única Riesgo recargada	Prima única Riesgo sin recargo
1	0,1110	0,1110
1,1	0,1221	0,1110
1,2	0,1332	0,1110
1,3	0,1443	0,1110
1,4	0,1554	0,1110
1,5	0,1665	0,1110
1,6	0,1775	0,1110
1,7	0,1886	0,1110
1,8	0,1997	0,1110
1,9	0,2108	0,1110

Fuente: Elaboración propia. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: Edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, $S_1 = 0,7$, $S_2 = 0,9$, $S = 0,999$, $g = 0,9969$ y $C = 1,1034$. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez, E: Tabla proyectada del año 2.000 de mortalidad española de 1950 a 1990.



Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla 11. En el gráfico se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima pura según aumenta el parámetro ρ, en base a la segunda ley de Dormoy.

5.2.2.3 Cálculo de la prima única de riesgo recargada mediante la ley de Gompertz

La expresión de la función de supervivencia de esta ley (apéndice 3):

$$S(x) = g^{C^x - 1}$$
$$C > 1$$
$$g < 1$$
$$x > 0$$

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} \right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

$$S_x(t) = g^{C^x\left(C^t - 1\right)} = \frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^x}}$$

Se hace el cambio de variable expuesto en el capítulo cuarto:

$$P_{rec} = -\frac{1}{Ln\, v}\int_0^1 \left(\frac{g^{C^{\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}}}{g^{C^x}}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{Lnv}\int_\infty^0 \left(\frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^x}}\right)^{\frac{1}{\rho}} v^t\, Ln\, v dt =$$

$$= \frac{1}{g^{C^x \frac{1}{\rho}}}\int_0^\infty \left(g^{C^x C^t}\right)^{\frac{1}{\rho}} v^t dt = \frac{1}{g^{C^x \frac{1}{\rho}}}\int_0^\infty \left(g^{C^x \frac{1}{\rho}}\right)^{C^t} v^t dt$$

Llamando $d = g^{C^x \frac{1}{\rho}}$:

$$P_{rec} = \frac{1}{d}\int_0^\infty (d)^{C^t} v^t dt = \frac{1}{d}\int_0^\infty \left(d^C v\right)^t dt = \frac{1}{d}\left(\frac{\left(d^C v\right)^t}{Ln\left(d^C v\right)}\right)_0^\infty =$$

$$= \frac{-1}{d\left(Ln\, d^C + Ln\, v\right)} = \frac{-1}{d\left(C L n\, d + Ln\, v\right)}$$

La expresión final de la prima recargada con la ley de Gompertz, deshaciendo el cambio de variable anterior, queda de la siguiente manera:

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Ln\, z}{Ln\, v}\right)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz = \frac{-1}{g^{C^x \frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Ln\, g + Ln\, v\right)} \qquad (5.2.6)$$

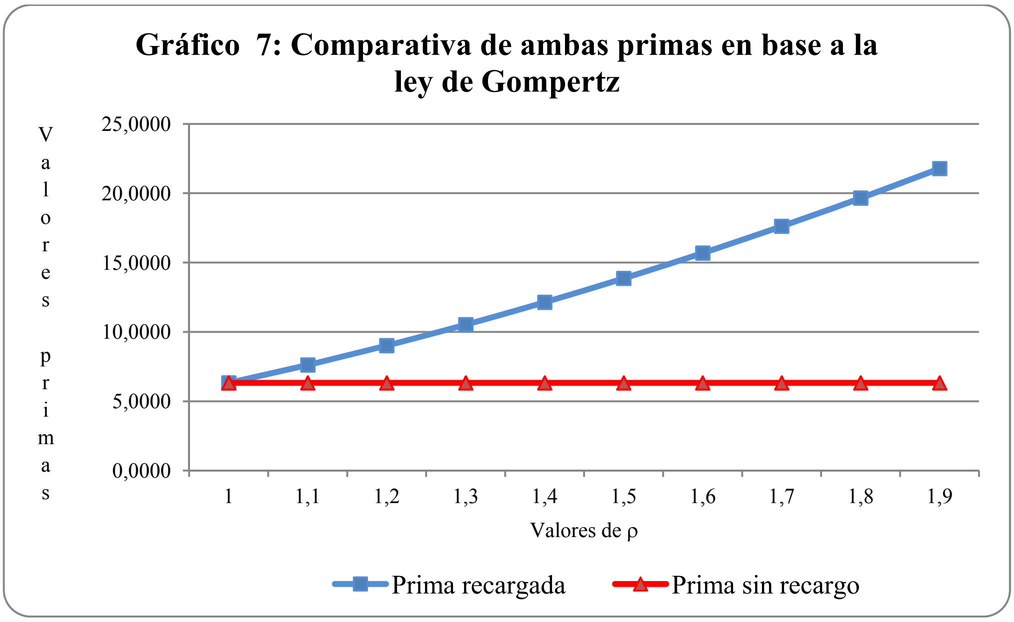
La probabilidad de que un asegurado de edad x sobreviva un período es ${}_1p_x = g^{C^x(C-1)}$, mientras que la misma probabilidad de la nueva variable Y tiene esta expresión: ${}_1p_y = \left(g^{\frac{1}{\rho}}\right)^{C^x(C-1)}$. El objetivo es obtener una prima recargada mayor que la prima única de riesgo inicial. Por esto, al recargar la probabilidad de supervivencia (por ser el exponente $\frac{1}{\rho}$ menor que la unidad), se genera un efecto negativo para la compañía tratándose de un seguro de rentas, ya que el asegurado vivirá más y la aseguradora deberá abonar más cuantía de prestación.

La prima recargada obtenida con esta ley y mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia presenta la misma forma que tiene la prima sin recargar, cambiando solamente el valor del parámetro g, tal como sucedía en el seguro con cobertura de fallecimiento.

TABLA 12: Comparativa de la prima de riesgo recargada y sin recargar en base a la ley de Gompertz

ρ	Prima única Riesgo recargada	Prima única Riesgo sin recargo
1	6,3241	6,3241
1,1	7,6113	6,3241
1,2	9,0100	6,3241
1,3	10,5183	6,3241
1,4	12,1347	6,3241
1,5	13,8573	6,3241
1,6	15,6845	6,3241
1,7	17,6147	6,3241
1,8	19,6464	6,3241
1,9	21,7779	6,3241

Fuente: Elaboración propia. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: Edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, $S = 0{,}999$, $g = 0{,}9969$ y $C = 1{,}1034$. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez, E: Tabla proyectada del año 2.000 de mortalidad española de 1950 a 1990.



Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla 12. En el gráfico se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima pura según aumenta el parámetro ρ, en base a la ley de Gompertz.

5.2.2.4 Cálculo de la prima única de riesgo recargada mediante la primera ley de Makeham.

La expresión de la función de supervivencia de esta ley (apéndice 3):

$$S(x) = S^x g^{C^x - 1}$$
$$C > 1$$
$$g < 1$$
$$S < 1$$
$$x > 0$$

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{\rho}} dz = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{S^{x+t} g^{C^{x+t}-1}}{S^x g^{C^x - 1}} = S^t g^{C^{x+t} - C^x} = S^t g^{C^x\left(C^t - 1\right)}$$

Se hace el mismo cambio de variable que en epígrafe 4.1:

$$P_{rec}=\frac{1}{Lnv}\int_0^1\left(\frac{S^{\frac{Lnz}{Lnv}}g^{C^x\left(C^{\frac{Lnz}{Lnv}}-1\right)}}{1}\right)^{\frac{1}{\rho}}dz=\frac{1}{Lnv}\int_\infty^0\left(S^t g^{C^x\left(C^t-1\right)}\right)^{\frac{1}{\rho}}v^t\,Lnv\,dt=$$

$$=\frac{1}{\left(g^{C^x}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\int_0^\infty\left(S^t g^{C^{x+t}}\right)^{\frac{1}{\rho}}v^t\,dt=\frac{1}{\left(g^{C^x}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\int_0^\infty\left(S^{\frac{1}{\rho}t}g^{C^x\frac{1}{\rho}}\right)^{C^t}v^t\,dt$$

$$d=g^{C^x\frac{1}{\rho}}$$

$$P_{rec}=\frac{1}{d}\int_0^\infty S^{t\frac{1}{\rho}}d^{C^t}v^t\,dt=\frac{1}{d}\int_0^\infty\left(S^{\frac{1}{\rho}}d^C v\right)^t dt=\frac{1}{d}\left[\frac{\left(S^{\frac{1}{\rho}}d^C v\right)^t}{Ln\left(S^{\frac{1}{\rho}}d^C v\right)}\right]_0^\infty=\frac{-1}{d\left(\frac{1}{\rho}LnS+CLnd+Lnv\right)}$$

La expresión final de la prima recargada con la ley de Makeham queda de la siguiente manera:

$$P_{rec}=-\frac{1}{Lnv}\int_0^1\left(\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{\rho}}dz=\frac{-1}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}Ln\,S+C^{x+1}\frac{1}{\rho}Ln\,g+Ln\,v\right)}\qquad(5.2.7)$$

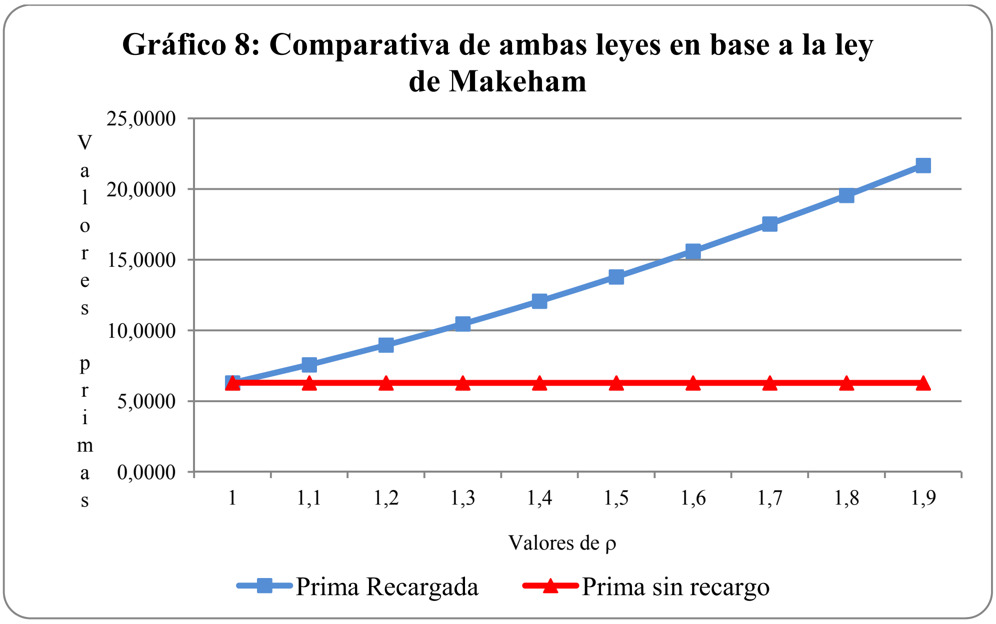
La probabilidad de que un asegurado de edad x sobreviva un período (probabilidad de supervivencia para un período) es ${}_1p_x=Sg^{C^x(C-1)}$, mientras que la misma probabilidad de supervivencia pero para la nueva variable Y tiene esta expresión ${}_1p_y=S^{\frac{1}{\rho}}(g)^{C^{\frac{1}{\rho}x}(C-1)}$. Reitero lo que ocurre con las anteriores leyes, y es que el hecho de introducir el recargo implícito al trabajar con la función de distorsión de Wang en forma de potencia hace que se incremente la prima recargada al ser el parámetro ρ mayor que la unidad, del mismo modo que sucede con las leyes anteriores para esta modalidad de seguro.

La prima recargada por aplicación de esta ley muestra que dicha prima coincide con la prima pura de otra primera ley de Makeham con parámetros modificados $S^{\frac{1}{\rho}}$, $g^{\frac{1}{\rho}}$ y C.

TABLA 13: Comparativa de la prima de riesgo recargada y sin recargar en base a la ley de Makeham

ρ	Prima única Riesgo recargada	Prima única Riesgo sin recargo
1	6,2901	6,2901
1,1	7,5706	6,2901
1,2	8,9621	6,2901
1,3	10,4627	6,2901
1,4	12,0709	6,2901
1,5	13,7848	6,2901
1,6	15,6029	6,2901
1,7	17,5236	6,2901
1,8	19,5452	6,2901
1,9	21,6663	6,2901

Fuente: Elaboración propia. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: Edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, $S = 0,999$, $g = 0,9969$ y $C = 1,1034$. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez, E: Tabla proyectada del año 2.000 de mortalidad española de 1950 a 1990.



Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla 13. En el gráfico se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima pura según aumenta el parámetro ρ , en base a la ley de Makeham.

5.2.3 Tabla resumen de las primas únicas de riesgo recargadas para cada una de las leyes de supervivencia anteriormente empleadas para un seguro de rentas.

Se muestra una relación de la prima única de riesgo recargada a partir de la función de distorsión de Wang, calculada mediante el empleo de las funciones de supervivencia de la edad de fallecimiento más habituales en la práctica.

TABLA 14: Resumen de las primas únicas de riesgo recargadas

Leyes Supervivencia	**Prima Única de Riesgo Recargada**
Primera Ley de Dormoy	$P_{rec} = \dfrac{-1}{LnS^{\frac{1}{\rho}} + Lnv}$
Segunda Ley de Dormoy	$P_{rec} = \dfrac{-1}{LnS_1^{\frac{1}{\rho}} + Lnv + LnS_2^{2\frac{1}{\rho}(x+1)}}$
Ley de Gompertz	$P_{rec} = \dfrac{-1}{g^{C^x \frac{1}{\rho}} \left(C^{x+1} \dfrac{1}{\rho} Lng + Lnv \right)}$
Ley de Makeham	$P_{rec} = \dfrac{-1}{g^{C^x \frac{1}{\rho}} \left(\dfrac{1}{\rho} LnS + C^{x+1} \dfrac{1}{\rho} Lng + Lnv \right)}$

Fuente: Elaboración propia. Tabla que muestra las primas únicas de riesgo recargadas, calculadas a partir de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, con cada una de las leyes de supervivencia explicadas en el Apéndice 3.

5.3 Comparativa de la prima única de riesgo recargada con la prima única de riesgo sin recargar para un seguro de rentas.

TABLA 15: Resumen de las primas únicas de riesgo, netas y recargadas

LEYES SUPERVIVENCIA	**Prima única Riesgo sin recargo**	**Prima única riesgo recargada mediante función distorsión Wang**
Primera ley de Dormoy	$P=-\frac{1}{LnS+Lnv}$	$P_{rec}=\frac{-1}{LnS^{\frac{1}{\rho}}+Lnv}$
Segunda ley de Dormoy	$P=\frac{-1}{LnS_1+(2x+2)LnS_2+Lnv}$	$P_{rec}=\frac{-1}{LnS_1^{\frac{1}{\rho}}+Lnv+LnS_2^{2\frac{1}{\rho}(x+1)}}$
Ley de Gompertz	$P=\frac{-1}{g^{C^x}\left[C^{x+1}Lng+Lnv\right]}$	$P_{rec}=\frac{-1}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng+Lnv\right)}$
Primera ley de Makeham	$P=\frac{-1}{g^{C^x}\left(LnS+C^{x+1}Lng+Lnv\right)}$	$P_{rec}=\frac{-1}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}LnS+C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng+Lnv\right)}$

Fuente: Elaboración propia. Comparativa de las primas únicas de riesgo sin recargar y recargadas implícitamente a través de la función de distorsión de Wang en forma de potencia con cada una de las leyes de supervivencia explicadas en el Apéndice 3.

Para el caso de un seguro de rentas (cobertura de supervivencia), la función de distorsión de Wang en su forma de potencia es también una medida de riesgo coherente, tal como ha sido indicado en el capítulo tercero, epígrafe 3.4, ya que verifica todas las propiedades deseables para ello, incluso la de subaditividad, para el caso de que el parámetro $\rho \geq 1$.

Respecto al análisis de cada una de las leyes objeto de estudio, analizando la primera ley de Dormoy, el exponente de la función de distorsión $\frac{1}{\rho}$ vuelve a afectar de manera proporcional al tanto instantáneo de mortalidad, lo cual hace que la prima recargada sea mayor que la prima sin recargar, dado que en esta modalidad de seguro el valor de ρ es mayor o igual a la unidad. Pero se observa que el efecto que tiene el cálculo de la prima única de riesgo a través de la función de distorsión de Wang no hace que cambie la expresión de la ley, sólo cambia el valor del parámetro.

Es importante señalar que los valores que se han asignado al parámetro ρ en este trabajo de investigación y para esta modalidad de seguro son valores seleccionados aleatoriamente, lo mismo que para el seguro vida entera, con el único requisito que dicho parámetro ha de ser mayor que cero (Wang, (1995)) y además mayor que la unidad para el seguro de rentas, para permitir obtener una prima recargada superior a la prima sin recargar. No obstante se ha considerado la recomendación realizada por SOLVENCIA II en el documento QIS5, que dice que el valor del parámetro se recomienda sea de 1.20 para un seguro de supervivencia.

Como se ha comentado con anterioridad, la asignación de los valores numéricos de dicho parámetro es un punto objeto de futura línea de investigación, dado que no se han seguido criterios de solvencia y aversión al riesgo para su selección. Para la modalidad del seguro de rentas se han tomado valores del parámetro ρ que oscilan desde 1 hasta 1.9, con incrementos de valor 0.1. Con estos valores asignados a ρ lo que se ha pretendido es demostrar, tanto matemática como gráficamente que la prima recargada obtenida mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia es superior a la prima sin recargar.

Ha de ser cada compañía individualmente considerada la que estime, en base a sus necesidades de solvencia y nivel de aversión al riesgo que presente, que valores son los más adecuados a asignar al parámetro ρ, cumpliendo con el requisito que dicho parámetro ha de tomar un valor mayor que la unidad para esta modalidad de seguro.

Al ser el valor de ρ mayor que la unidad, el tanto instantáneo disminuye, provocando un efecto económico negativo para la compañía en esta modalidad de seguro con cobertura de supervivencia, lo cual redunda en que la prima recargada habrá de ser mayor, ya que existe más riesgo para la aseguradora.

Debido a la función de distorsión, la probabilidad de sobrevivir es mayor (dado que S es un número menor que la unidad, elevado a un número $\frac{1}{\rho}$ que es también menor que la unidad). Y esto es negativo para la compañía ante un seguro de rentas, de modo que cobrará una prima más alta, como si se recargase la probabilidad de supervivencia.

La prima recargada obtenida corresponde a la prima pura de una nueva variable aleatoria duración de vida hasta el fallecimiento que sigue igualmente una primera ley de Dormoy con un tanto instantáneo de fallecimiento proporcional al de la variable X.

$$\begin{aligned} \mu_x &= -\mathrm{Ln}S \\ \mu_y &= -\mathrm{Ln}S^{\frac{1}{\rho}} = \frac{1}{\rho}\left(-\mathrm{Ln}S\right) = \frac{1}{\rho}\mu_x \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

El exponente de la función de distorsión sigue siendo directamente proporcional al tanto instantáneo de mortalidad, es decir, la prima recargada obtenida coincide con la prima pura de una nueva variable aleatoria duración de vida hasta el fallecimiento que sigue a la primera ley de Dormoy, pero con parámetro $S^{\frac{1}{\rho}}$ y tanto instantáneo de mortalidad proporcional al de la variable X.

Con respecto a la segunda ley de Dormoy, el hecho de emplear la función de distorsión hace que se vuelva a modificar el valor de los dos parámetros S_1 y S_2, ambos menores que la unidad, originando el mismo efecto que la anterior ley en las probabilidades, tanto de fallecimiento como de supervivencia. La probabilidad de fallecimiento disminuye, mientras que la probabilidad de supervivencia se incrementa, lo cual hace que la prima recargada sea mayor que la prima sin recargar. El parámetro ρ, con valor mayor que la unidad, sólo modifica el valor de los parámetros, pero la ley permanece invariante ante el hecho de que la prima recargada se encuentre recargada mediante un recargo implícito. Y el cociente $\frac{1}{\rho}$, por lo tanto, es también directamente proporcional al tanto instantáneo de mortalidad.

$$\mu_x = -2x\,LnS_2 - LnS_1$$
$$\mu_y = -2x\frac{1}{\rho}LnS_2 - \frac{1}{\rho}LnS_1 = \frac{1}{\rho}\left(-2x\,LnS_2 - LnS_1\right) = \frac{1}{\rho}\mu_x \tag{5.3.2}$$

Analizando la ley de Gompertz, el empleo de la función de distorsión de Wang afecta al valor del parámetro g, el cual es menor que la unidad, generando el mismo efecto que las leyes anteriores, esto es, un incremento de la probabilidad de supervivencia y un decremento de la de fallecimiento, redundando pues en una prima recargada mayor que la prima sin recargar. Pero la ley sigue siendo invariante, modificándose solamente el valor del parámetro g.

$$\mu_x = -Ln\,g\,Ln\,C\,C^x$$
$$\mu_y = -Ln\,g^{\frac{1}{\rho}}\,Ln\,C\,C^x = \frac{1}{\rho}\left(-Ln\,g\,Ln\,C\,C^x\right) = \frac{1}{\rho}\mu_x \tag{5.3.3}$$

La prima recargada obtenida coincide con la prima pura de otra variable duración de vida hasta el fallecimiento que sigue una ley de Gompertz de parámetros C y $g^{\frac{1}{\rho}}$, siendo el tanto instantáneo proporcional al correspondiente de la variable original X.

Y por último la primera ley de Makeham. Como en esta ley se trabaja con dos parámetros, g y S, ambos menores que la unidad, el efecto que tiene introducir un recargo de manera implícita por el empleo de la función de distorsión en forma de potencia es exactamente el mismo que con las leyes anteriores. La ley permanece invariante ante el empleo de la función de distorsión de Wang. No cambia la ley de supervivencia, sólo cambian los valores de los parámetros. El modelo, pues, no se modifica, sigue siendo un modelo Gompertz o un modelo Makeham.

$$\mu_x = -LnS - Lng\,LnC\,C^x$$
$$\mu_y = -LnS^{\frac{1}{\rho}} - Lng^{\frac{1}{\rho}}LnC\,C^x = \frac{1}{\rho}\left(-LnS - Lng\,LnC\,C^x\right) = \frac{1}{\rho}\mu_x \tag{5.3.4}$$

La prima recargada coincide con la prima pura de otra variable duración de vida hasta el fallecimiento que sigue una ley de Makeham con parámetros $S^{\frac{1}{\rho}}$, $g^{\frac{1}{\rho}}$ y C. De este modo el tanto instantáneo de mortalidad es proporcional al correspondiente de la variable original X, siendo $\frac{1}{\rho}$ el factor de proporcionalidad.

Por tanto, el efecto que tiene la introducción del recargo implícito mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia en una modalidad de seguro de rentas es que hace que no cambie la expresión de la ley, sólo que se modifiquen los parámetros. La prima recargada no modifica la expresión de la ley, sólo hace que cambie el valor de los parámetros. Por tanto las leyes de supervivencia siguen siendo invariantes ante la función de distorsión de Wang en su forma de potencia para un seguro con cobertura de supervivencia. Y el efecto que tiene el exponente de la función de distorsión, $\frac{1}{\rho}$, sobre el tanto instantáneo de mortalidad es de proporcionalidad al mismo.

Los resultados obtenidos son coherentes con el entorno asegurador, tanto en el caso de un seguro con cobertura de fallecimiento como en un seguro con cobertura de supervivencia. El efecto que tiene trabajar con la función de distorsión de Wang en su forma de potencia hace que permanezca invariante la expresión de la ley, sólo afectando al valor de los parámetros, y esto sucede con todas y cada una de las leyes objeto de estudio, tomando como ejemplo tanto una modalidad de seguro con cobertura de supervivencia como una modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento.

Las dos modalidades de seguro seleccionadas para el estudio son complementarias en cuanto a cobertura se refiere, y es por ello por lo que el campo de variación del parámetro ρ no puede ser el mismo, el cual tiene la consideración de parámetro de aversión al riesgo, siendo el valor de dicho parámetro menor que la unidad para un seguro con cobertura de fallecimiento y con valor mayor que la unidad para un seguro con cobertura de supervivencia. En cualquiera de los dos casos, el parámetro ρ ha de ser mayor a cero.

Capítulo Sexto. Conclusiones

En esta tesis se ha obtenido un principio de cálculo de primas para seguros de vida basado en la medida de riesgo coherente denominada esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en forma de potencia. El objetivo perseguido ha sido obtener un método alternativo de tarificación, diferente del principio basado en las esperanzas matemáticas, para calcular la prima única de riesgo recargada que refleje una siniestralidad superior a la esperada. Las dos modalidades de seguro de vida elegidas para ello han sido el seguro vida entera, para la cobertura de fallecimiento, y el seguro de rentas vitalicio, para la cobertura de supervivencia. El resultado obtenido permite justificar la práctica habitual que realizan las compañías aseguradoras, en el área de vida, de manipular el tanto instantáneo de mortalidad con el fin de obtener una prima recargada a través de un recargo implícito. La recomendación que realiza Solvencia II en lo que respecta al importe que tome dicho recargo se encuentra especificada en el informe QIS5 (epígrafe 1.1).

Se han obtenido dos expresiones de prima recargada mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en su forma de potencia, una para un seguro de vida con cobertura de fallecimiento (4.2.1) y otra para un seguro de vida con cobertura de supervivencia (5.2.1). Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

- La función de distorsión de Wang en su forma de potencia es una medida de riesgo coherente para el caso que $\rho > 1$, coincidiendo este caso con el campo de variación del parámetro para un seguro de vida con cobertura de supervivencia. Así fue demostrado por Wang en 1995, y explicadas las cuatro propiedades deseables para ello en el capítulo tercero, epígrafe 3.4. Pero lo novedoso a resaltar es que esta función de distorsión de Wang en su forma de potencia <u>sigue siendo una medida de riesgo coherente (</u>para el caso de tarificación de un seguro con cobertura de fallecimiento), <u>con valores del parámetro</u> $\rho < 1$. La demostración de la propiedad de subaditividad para el caso de un seguro de fallecimiento está demostrada en el capítulo cuarto, epígrafe 4.2. Por lo tanto se puede concluir que la función de distorsión seleccionada en este trabajo, la llamada Esperanza Distorsionada, es apta para tarificar en vida, tanto para una modalidad de seguro con cobertura de supervivencia como de fallecimiento, haciendo lo análogo a lo que ya hizo Wang en 1995 pero aplicado a la rama de los seguros generales.

- La prima recargada, calculada para todas y cada una de las leyes empleadas y para los dos tipos de seguros, con la función de distorsión de Wang en forma de potencia, es la misma a la que se obtendría (prima sin recargar) a partir de otra variable aleatoria que sigue la misma ley de supervivencia, modificándose exclusivamente el valor de los parámetros. Para la modalidad de seguro vida entera, la modificación que sufren los parámetros origina el mismo efecto en la probabilidad de fallecimiento en las cuatro leyes de supervivencia: dicha probabilidad aumenta, lo cual hace que la prima recargada sea superior a la prima sin recargar. Para la modalidad de seguro de rentas, la modificación que sufren los parámetros origina el mismo efecto en la probabilidad de fallecimiento en las cuatro leyes de supervivencia: dicha probabilidad disminuye, lo cual hace que la prima recargada sea superior a la prima sin recargar. De este modo se ha conseguido el objetivo propuesto de recargar la prima única de riesgo mediante un recargo implícito, con el único efecto sobre las leyes de cambiar sus parámetros. Justamente la modificación que experimentan éstos es que los nuevos parámetros son proporcionales a los parámetros de las leyes aplicadas para calcular la prima sin recargar, siendo el factor de proporcionalidad el exponente de la función de distorsión transformada proporcional.

  - El efecto que tiene en la primera ley de Dormoy la función de distorsión es que hace que cambie el valor del parámetro S, teniendo ahora éste una expresión $S^{\frac{1}{\rho}}$. Esta modificación del parámetro es exactamente la misma tanto para la modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento como para la modalidad de seguro con cobertura de supervivencia.

  - Con respecto a la segunda ley de Dormoy, la función de distorsión modifica el valor de los parámetros S_1 y S_2, teniendo ahora éstos una expresión $S_1^{\frac{1}{\rho}}$ y $S_2^{\frac{1}{\rho}}$. Esta modificación de los parámetros es exactamente la misma tanto para la modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento como para la modalidad de seguro con cobertura de supervivencia.

- Para la ley de Gompertz, la función de distorsión afecta al valor del parámetro g, teniendo éste ahora una expresión $g^{\frac{1}{\rho}}$, y permaneciendo el parámetro C invariable. Esta modificación del parámetro es exactamente la misma tanto para la modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento como para la modalidad de seguro con cobertura de supervivencia.

- Para la ley de Makeham, la función de distorsión afecta al valor de los parámetros g y S, teniendo éstos ahora una expresión $S^{\frac{1}{\rho}}$ y $g^{\frac{1}{\rho}}$. Esta modificación de los parámetros es exactamente la misma tanto para la modalidad de seguro con cobertura de fallecimiento como para la modalidad de seguro con cobertura de supervivencia.

▪ El efecto que produce, sobre las leyes de mortalidad utilizadas, la función de distorsión es que las nuevas leyes presentan un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al de la ley original. Esto se ha realizado a nivel general y por lo tanto se verifica también a nivel particular para cada ley estudiada. El factor de proporcionalidad es $\frac{1}{\rho}$, que es justamente el exponente de la función de distorsión transformada proporcional.

▪ En los seguros de vida con modalidad seguro de rentas (cobertura de supervivencia), ya estaba demostrado (Wang, (1995)) que para $\rho \geq 1$ la esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en forma de potencia es una medida de riesgo coherente.

▪ En el caso de los seguros de vida con modalidad vida entera, se demuestra en esta tesis que para valores de $\rho \leq 1$, también constituye una medida de riesgo coherente la esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en forma de potencia. Dicha demostración está realizada en el capítulo cuarto, epígrafe 4.2.

▪ En el caso de los seguros de modalidad vida entera el exponente de la función de distorsión y por tanto el factor de proporcionalidad del tanto $\frac{1}{\rho}$ es mayor que la unidad, o bien $\rho \leq 1$. Por esta razón, el riesgo de fallecer, considerando la función de distorsión, es mayor. En este caso, el tanto instantáneo de mortalidad de la variable aleatoria Y es mayor que el de la variable aleatoria X, lo que implica que la prima recargada es mayor que la prima sin estar recargada de manera implícita.

▪ En el caso de los seguros de modalidad vida entera, al ser el cociente $\frac{1}{\rho}$ proporcional al tanto instantáneo de mortalidad, conforme disminuye ρ aumenta la probabilidad de fallecimiento, luego esto implica un mayor riesgo para la compañía aseguradora. Es por esta razón por la que la entidad cobrará primas recargadas con el recargo implícito cada vez mayores ante decrementos en el valor de dicho parámetro. Por ello, la relación entre la prima única de riesgo recargada y el parámetro ρ será decreciente.

▪ En los seguros de modalidad seguro de vida con cobertura de supervivencia (seguro de rentas vitalicio), el exponente de la función de distorsión y por lo tanto, el factor de proporcionalidad del tanto instantáneo, es menor que la unidad, es decir, $\rho \geq 1$. Por esta razón, el riesgo de longevidad, considerando la función de distorsión, es mayor. El tanto instantáneo de la variable aleatoria Y es menor que el de la variable aleatoria X, por lo que la prima recargada es mayor que la prima sin recargar de manera implícita.

- En el caso de los seguros de rentas, al ser el cociente $\frac{1}{\rho}$ proporcional al tanto instantáneo de mortalidad, conforme aumenta ρ disminuye la probabilidad de fallecimiento, o lo que es lo mismo, aumenta la probabilidad de supervivencia del asegurado. Esto implica un mayor riesgo para la compañía aseguradora ante esta modalidad de seguro con cobertura de supervivencia. Es por esta razón por la que la entidad cobrará primas recargadas de manera implícita cada vez mayores ante incrementos en el valor de dicho parámetro, cuyos valores están definidos para $\rho \geq 1$. Por ello, la relación entre la prima única de riesgo recargada y el parámetro ρ será creciente.

APENDICE 1

El seguro de vida: definición y personas que lo forman. Establecimiento del principio de Equivalencia Actuarial.

Un seguro de vida es una operación normalmente de largo plazo (Bowers et al (1997)), compuesta por una prestación única o múltiple y una contraprestación única o múltiple (dependerá de la modalidad de seguro de vida elegida). La prestación representa el capital o capitales garantizados por la compañía en el momento de acaecimiento del evento cubierto en la póliza, pagaderos al asegurado o al beneficiario en su caso, mientras que la contraprestación representa la prima única o periódica que la aseguradora cobra del asegurado por admitir que éste le transfiera su riesgo. Se trata también de una operación de capitalización, dado que la valoración de los capitales en un determinado momento se realiza con la ley de capitalización compuesta o su inversa, valorándose todos los flujos de la operación al llamado tipo de interés técnico, el cual representa la rentabilidad que la compañía aseguradora va a garantizar al asegurado. Esta rentabilidad garantizada es la mínima que obtiene la compañía por invertir las primas recaudadas.

Los elementos reales del seguro son las personas, físicas o jurídicas, que lo integran. Son tres, el asegurador, el tomador y el beneficiario de la póliza. Tomador y beneficiario no suelen coincidir en los seguros de vida, sobre todo en los seguros con cobertura de fallecimiento.

Se puede dar otra definición del seguro de vida teniendo en cuenta la existencia de dichos elementos reales, tal que es el contrato por el cual el asegurador se obliga frente al beneficiario, a cambio de una cantidad de dinero pagada por el tomador llamada prima, a satisfacer una cantidad fija de dinero, una renta o una combinación de ambas en el caso de que acaezca el supuesto cubierto en la póliza, el cual será el fallecimiento del tomador o la supervivencia (Gerber (1997)).

El asegurador es la persona jurídica (la compañía aseguradora) que se hace cargo del riesgo transferido por el asegurado a cambio de una cantidad de dinero. Las compañías aseguradoras de ámbito privado se encargan de toda clase de modalidades de seguro, adoptando la forma de mutuas o sociedades anónimas. Mientras que en las primeras no existe ánimo de lucro, en las segundas sí, ya que se espera obtener beneficios de las inversiones realizadas con las primas recaudadas.

El asegurado es la persona física que desea transferir el riesgo de sobrevivir o de fallecer a la compañía aseguradora, dado que le es más útil (en base a la teoría de la utilidad) transferir sus riesgos a la compañía que soportarlos el mismo.

El tomador de la póliza es la persona física o jurídica que firma la póliza, obligándose por ello al pago de la prima. En los seguros de vida normalmente coincide tomador con asegurado, excepto en aquellos seguros contratados por empresas a favor de sus trabajadores como un beneficio social.

El beneficiario es la persona que será indemnizada por la compañía, esto es, que recibirá el capital o capitales asegurados cuando se produzca alguno de los eventos cubiertos en la póliza.

En la valoración de las operaciones de seguro de vida es necesario que se cumpla el principio de subestimación de las necesidades futuras respecto de los capitales asegurados, que indica que a igualdad de cuantías se prefieren los capitales presentes a los futuros, dado que para valorar a éstos se emplean modelos de valoración financiera. Además se pueden emplear modelos de naturaleza aleatoria, dado que algunas de las variables con las que se trabaja en estos modelos son variables aleatorias.

El punto de partida de toda operación de seguro de vida consiste en establecer el denominado “Proceso Actuarial (Vegas, J et al (1993)).

Dicho proceso está compuesto de los siguientes elementos:

• Los sucesos aleatorios. $\omega \in \Omega$. La aparición de dichos sucesos aleatorios originará la prestación.

• Los capitales vinculados a dichos sucesos aleatorios, $C(\omega; t)$.

Son los capitales financieros que van vinculados con los sucesos aleatorios en cada uno de los momentos del tiempo. Los capitales de este proceso actuarial se distribuyen según una variable aleatoria binomial en la duración del proceso. Por esta razón si acaece el suceso aleatorio que da lugar al pago de la prestación por parte de la aseguradora se produce una pérdida económica para la misma, mientras que si no acaece el suceso aleatorio que da lugar al pago de la prestación por parte de la aseguradora, dicha pérdida económica no se produce.

• Duración temporal: $t \in T$

Por lo tanto dicho proceso actuarial lo forman los capitales financieros asociados a los diferentes momentos del tiempo, así como asociados a la presentación de los sucesos aleatorios.

$$\{C(\omega; t); t \in T\}$$

Se trata de un proceso financiero-estocástico, ya que el elemento financiero son los capitales que lo forman, mientras que el componente estadístico viene reflejado por las probabilidades, de fallecimiento o supervivencia, que van asociadas al acaecimiento de los sucesos.

El proceso actuarial está compuesto de dos subprocesos:

1. Subproceso de las prestaciones: está compuesto por los capitales que van asociados al acaecimiento de los sucesos.

   $$\{C(\omega; t); t \in T\}$$

2. Subproceso de las aportaciones o contraprestaciones: está compuesto por las primas que son abonadas por el asegurado para tener derecho a las prestaciones económicas garantizadas en el supuesto de que acaezcan los sucesos aleatorios cubiertos en la póliza.

   $$\{P(\omega; t); t \in T\}$$

Una vez que se establecen los dos subprocesos se aplica la llamada equivalencia estática, siendo estática porque se aplica en el origen de la operación de seguro. Y esta equivalencia estática establece que el valor actual actuarial del subproceso de las prestaciones ha de ser igual, en términos de esperanzas matemáticas, al valor actual actuarial del subproceso de las aportaciones. Es el llamado principio de equivalencia actuarial. (Nieto de Alba y Vegas Asensio, 1993), que a continuación se explica.

Sean C_t los capitales que van asociados a los intervalos de tiempo y P_t el importe de las aportaciones o primas asociadas a los períodos de tiempo. La magnitud v es el llamado factor de actualización financiera, con expresión matemática $v = \frac{1}{1+i}$, siendo i el tipo de interés técnico con el que se actualizan los flujos monetarios.

$$\begin{aligned} C(0) &= \sum_{t=t_1}^{t_n} E\left(C(\omega;t)\right) v^t \\ P(0) &= \sum_{t=t_1}^{t_n} E\left(P(\omega;t)\right) v^t \end{aligned} \tag{1}$$

Aplicando el principio de equivalencia actuarial:

$$C(0) = P(0)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} E\left(C(\omega;t)\right) v^t = \sum_{t=t_1}^{t_n} E\left(P(\omega;t)\right) v^t$$

Se define la variable aleatoria "Resultado (beneficio o pérdida) de la póliza R", como el valor actual de las aportaciones menos el valor actual de las prestaciones:

$$R = \sum_{t=t_1}^{t_n} E\left(P(\omega;t)\right) v^t - \sum_{t=t_1}^{t_n} E\left(C(\omega;t)\right) v^t$$

- Si $R < 0$ implica que la aseguradora tiene pérdidas, ya que el valor actual de las prestaciones a abonar al asegurado supera el valor actual del dinero recaudado en forma de primas abonadas por el asegurado.
- Si $R > 0$ implica que la aseguradora obtiene beneficios, ya que el valor actual de las prestaciones abonadas por la aseguradora es inferior al valor actual del dinero recaudado en forma de primas abonadas por el asegurado.

Esta variable aleatoria "R" depende de la vida residual, esto es, el tiempo de vida de un asegurado desde el período t_1 (medido en años completos) hasta su fallecimiento.

El principio de equivalencia actuarial establece que la esperanza matemática de dicha variable aleatoria resultado ha de ser nula, esto es, E[R]=0.

$$
\begin{aligned}
&E(R)=0\\
&E\left(\sum_{t=t_1}^{t_n}E\big(P(\omega;t)\big)v^t\right)-E\left(\sum_{t=t_1}^{t_n}E\big(C(\omega;t)\big)v^t\right)=0\\
&\sum_{t=t_1}^{t_n}E\left(P(\omega;t)\,v^t\right)-\sum_{t=t_1}^{t_n}E\left(C(\omega;t)\,v^t\right)=0\\
&\sum_{t=t_1}^{t_n}E\left(P(\omega;t)\,v^t\right)=\sum_{t=t_1}^{t_n}E\left(C(\omega;t)\,v^t\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Se va a considerar el pago de una prima única, prima abonada de una sola vez al inicio del contrato por un asegurado de edad actuarial x, representada por Π_x. Según la definición hecha anteriormente sobre la variable aleatoria resultado, para que se cumple dicho principio de equivalencia actuarial a prima única se exige que:

$\Pi_x =$ E(valor actual actuarial de las prestaciones)

$$\Pi_x=\sum_{t=t_1}^{t_n}E\left(C(\omega;t)\,v^t\right)$$

Se han sustituido los capitales financiero-aleatorios, por valores ciertos, que son las esperanzas matemáticas. Por aplicación de dicho principio de equivalencia actuarial se obtiene el principio de la prima neta, siendo éste, como ya se ha comprobado, una medida de riesgo coherente.

Conceptos y variables aleatorias básicas.

A continuación se van a explicar los conceptos y todas y cada una de las variables aleatorias empleadas en esta tesis, así como sus funciones de distribución (Gil Fana, Heras y Vilar Zanón, (1999)).

1. X: Es una variable aleatoria que representa la edad de fallecimiento de una persona desde su nacimiento.

1.1 Función de Distribución:

$$F(x) = Pr(X \leq x)$$

Esta variable está definida en el conjunto de los números reales positivos, aunque en la práctica se acepta considerar una edad máxima representada por ω, por lo que el campo de variación es de $\left(0;\omega\right)$.

A partir de la función de distribución se calculan diferentes probabilidades:

$P(x < X \leq x + t / X > x) = \dfrac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = {}_t\, q_x$. Probabilidad temporal de que un individuo de edad x sobreviva a la edad x pero fallezca entre las edades x y x+t.

1.2 $S(x)$: Es la función de Supervivencia. Es una función que asigna, para cada edad, la probabilidad de que un individuo sobreviva a esa edad x.

La probabilidad de supervivencia complementaria a la de fallecimiento anteriormente definida es la de que una persona de edad x alcance con vida la edad x+t:

$${}_t p_x = 1 -{}_t\, q_x$$

$${}_t p_x = 1 -{}_t\, q_x = 1 - [P(x < X \leq x + t / X > x)] =$$
$$= 1 - [\frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}] = \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)}$$

1.3 Función de densidad, la cual puede ser expresada en términos de la función de supervivencia:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{-dS(x)}{dx}=-S'(x)$$

2. T_x: Vida residual. Es una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un individuo de edad x hasta su fallecimiento. Por esto el campo de variación de esta variable, dado $X > x$ será $(0;\omega-x)$.

La función de distribución de esta variable aleatoria es la siguiente:

$G_x(t)=P(T_x\leq t)={}_t\,p_x q_{x+t} \quad 0<t<\omega-x$. Representa la probabilidad de que una persona de edad x que esté viva a la edad x+t fallezca entre las edades $x+t$ y $x+t+1$, es decir, que fallezca en un período de t años. Se trata de una función de distribución condicionada a que $X > x$.

$$G_x(t)=F_x(x+t)=P(x<X\leq x+t\,/\,X>x)=\frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)}=\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} \tag{3}$$

La función de densidad de la citada variable aleatoria se representa de este modo:

$$\begin{aligned} g_x(t)&=\frac{d}{dt}\left(\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)}\right)=\frac{-d}{dt}\left(\frac{S(x+t)}{S(x)}\right)=\\ &=\frac{f(x+t)}{1-F(x)}=\frac{-S'(x+t)}{S(x)}\geq 0 \quad 0<t<\omega-x \end{aligned} \tag{4}$$

Se pueden expresar tanto las probabilidades de supervivencia como las de fallecimiento en términos de la función de distribución de la Vida residual, y por tanto, en términos de la función de supervivencia de la edad x:

$${}_t p_x=P(T_x>t)=1-G_x(t)=1-\left(\frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)}\right)=\frac{S(x+t)}{S(x)} \tag{5}$$

$$ {}_{t}q_{x} = P(T_x \le t) = G_x(t) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \quad (6) $$

3. K_x: Se trata de una variable aleatoria discreta que representa el número de años completos de vida hasta el fallecimiento de la persona asegurada.

$$ P(K_x = K) = P(K < T_x \le K+1) \quad K = 0,1,2.... \quad (7) $$

4. μ_x: Tanto instantáneo de mortalidad. Es una medida de la fuerza o intensidad de la mortalidad a la edad x para los individuos que han alcanzado esa edad. También se le conoce con el nombre de fuerza de mortalidad a la edad x (Ayuso et al, (2007)).

La relación entre el tanto instantáneo con la función de supervivencia es:

$$ \mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx} \mathrm{Ln} S(x) $$

La relación entre el tanto instantáneo con la distribución de la variable aleatoria vida residual es:

$$ \mu_{x+t} = \frac{\frac{f(x+t)}{S(x)}}{\frac{S(x+t)}{S(x)}} = \frac{g_x(t)}{1 - G_x(t)} \quad (8) $$

Por lo tanto, se puede calcular este tanto si se conocen las funciones de distribución y de densidad de la variable edad de fallecimiento definida con anterioridad.

APENDICE 2

La prima pura en los seguros de vida: establecimiento para un seguro vida entera y un seguro de rentas.

La prima pura, o también llamada siniestralidad media, es la que atiende exclusivamente a la cobertura del riesgo (Gómez Déniz, E (1999)), es decir, la que atiende exclusivamente a la prestación entregada por la compañía aseguradora ante el acaecimiento de las coberturas cubiertas en la póliza (para el caso de un seguro de vida es la cobertura de sobrevivir o fallecer).

Se trata del precio que el tomador del seguro va a abonar por la cobertura del riesgo garantizada en la póliza suscrita con el asegurador (Castelo, J y Guardiola, A (1992)).

Clasificación de las primas puras:

- Primas únicas: son las que abona el asegurado de una única vez al inicio del contrato para que la compañía efectúe el abono de la prestación si ocurre el suceso. Se trata de la valoración actual actuarial de la modalidad de seguro que se trate.

- Primas periódicas: Son aquellas que son abonadas por el asegurado en tanto no haya dado lugar al pago de la prestación por la aseguradora. Se trata de primas que se abonan mientras viva el asegurado y al principio de cada período, de modo que su valoración actuarial se fundamenta en forma de renta actuarial, vitalicia o temporal y prepagable. A su vez dichas primas periódicas se desglosan en dos tipos:

- Primas naturales: Son las que cubren exactamente el riesgo de cada uno de los sucesivos períodos de cobertura del seguro. Dichas primas crecen con la misma fuerza que la función q_x (probabilidad de fallecimiento). Por lo tanto se trata de primas muy elevadas a edades avanzadas. La modalidad de seguro que se acoge a esta modalidad de primas es el seguro temporal anual renovable (STAR). Así, si se supone la uniformidad de los fallecimientos dentro del año (muerte a mitad de año), la prima natural para este seguro con cuantía de prestación de 1 u.m es:

Primer año: $\Pi_x = v^{\frac{1}{2}} q_x$

Segundo año: $\Pi_{x+1} = v^{\frac{1}{2}} q_{x+1}$

Tercer año: $\Pi_{x+2} = v^{\frac{1}{2}} q_{x+2}$ y así sucesivamente el resto de los años, siendo v el factor de actualización financiera.

- Primas Niveladas: Se trata de las primas cuya evolución no coincide con la del riesgo, es decir, no coincide con la de la función q_x. Estas primas se emplean para suavizar el mayor coste del seguro a edades longevas, distribuyendo la total valoración del riesgo en cada uno de los años de manera promediada. Estas primas son las que darán lugar a la formación de las reservas matemáticas, por no coincidir exactamente en cada año del seguro la cobertura del riesgo que hace la aseguradora con la prima que abona el tomador para tener derecho a las prestaciones cubiertas en la póliza.

Dicha prima nivelada se descompone en prima de riesgo y prima de ahorro. En este trabajo se va a calcular la prima única de riesgo.

En lo referente a la parte de la prima pura nivelada que se destina a la prima de ahorro y la parte que se destina a la prima de riesgo, dependerá de la cobertura que ofrezca la póliza en cuestión.

A partir del principio de equivalencia actuarial (equilibrio estático) el valor actual actuarial de las prestaciones a abonar por la aseguradora ha de ser igual al valor actual actuarial de las contraprestaciones o aportaciones (primas a abonar por el tomador o asegurado). En este momento inicial se produce este equilibrio de igualdad entre estos dos valores actualizados. Lo que sucede es que dicho equilibrio inicial desaparece posteriormente, de modo que siempre que el asegurado siga vivo y en cualquier momento posterior al inicial se debe de verificar (para beneficio del asegurado) que el valor actual actuarial de las prestaciones garantizadas ha de ser mayor que el valor actual actuarial de las primas pendientes a abonar por parte del asegurado. En este caso dicha diferencia constituye un activo para el asegurado, ya que en caso contrario sería un pasivo.

Por lo tanto a la diferencia entre el valor actual actuarial de las prestaciones futuras valoradas en un momento k, posterior al inicio, y el valor actual actuarial de las primas futuras, a abonar por el asegurado, valoradas en un momento k posterior al inicio se la conoce con el nombre de reserva matemática o provisión matemática a prima pura.

Reserva matemática= VAA_k prestaciones futuras-VAA_k primas futuras.

La constitución de la reserva matemática representa un compromiso que contrae la aseguradora para con el asegurado, y al poderse calcular periódicamente en cualquier momento posterior al inicio de la operación de seguro permite que se lleve a cabo la valoración actuarial dinámica.

Existe obligación legal de constituir las reservas matemáticas, pero dependiendo que la cobertura, sea de sobrevivir o de fallecer, la composición de la misma variará.

En los seguros con cobertura de fallecimiento, a excepción del STAR (en los cuales toda la prima pura es prima de riesgo y por lo tanto no tiene sentido la constitución de las reservas matemáticas), las primas puras que se abonan son las niveladas periódicas, ya sean de cuantía constante o variable, de modo que en cada uno de los períodos de tiempo del seguro dicha prima no tiene por qué coincidir con la que cubriría exactamente el riesgo de fallecimiento en el período (la prima de riesgo), siendo la prima pura superior a la de riesgo mayor en los primeros años de seguro, que es cuando las probabilidades de fallecimiento son menores e inferior a la prima de riesgo en los últimos años.

La compañía aseguradora ha de ser previsora y destinar a buen fin las primas de ahorro positivas (que existen en los primeros años de contratada la póliza) para constituir las reservas matemáticas, para que durante los años en los que la prima pura no cubre exactamente el riesgo de fallecimiento del asegurado, dicha reserva absorba el déficit, quedando su importe a cero en el momento en que se produzca el vencimiento de la póliza.

En los seguros con cobertura de supervivencia, la compañía no cubre el riesgo de fallecimiento en ninguno de los períodos, debido a que la cobertura de la póliza es otra. Por ello el único objetivo que tienen las primas puras que abona el asegurado es constituir el capital garantizado objeto de la prestación en el caso de que el asegurado alcance con vida una determinada edad. De este modo todas las primas puras han de irse ahorrando para que constituyan la reserva matemática, la cual deberá ser de un importe igual al capital asegurado o al valor actual actuarial de la renta garantizada (dependiendo que se trata de un seguro capital diferido o un seguro de rentas) en el momento del vencimiento de la póliza

Establecimiento del principio de equi valencia actuarial en continuo, para las modalidades de seguros de vida denominada vida entera y seguro de rentas.

Establecimiento para un seguro de vida entera

Se trata de un seguro con una prestación cierta pero vencimiento aleatorio, ya que se conoce la cuantía del capital y que sucederá la muerte, pero no se sabe cuándo.

Este seguro se puede contratar con abono de una prima única, o bien con primas vitalicias (el pago de las mismas se realiza durante toda la vida del asegurado), o bien con primas temporales (el pago de las mismas se establece por un período de tiempo determinado, normalmente hasta los 65 años). En cualquiera de las modalidades el capital se paga en el momento del fallecimiento del asegurado, con independencia de que se haya completado o no el pago de las primas estipuladas (en el caso de las periódicas) (Nieto, U y Vegas, J (1993)).

$$P(0) = C(0)$$
$$\Pi_x = C\,A_x$$

Se establece el principio de equivalencia actuarial para el caso continuo, considerando que la prestación es abonada por la compañía aseguradora en el mismo momento del fallecimiento. Para ello se va a expresar este seguro en términos de la variable aleatoria "vida residual" dado que con posterioridad se va a resolver el valor de la prima única a partir de las diferentes funciones de supervivencia existentes.

Sea b_t el importe de las prestaciones (si son unitarias b_t toma el valor 1) a abonar por la aseguradora en el caso de acaecimiento del siniestro en cada período en que se produzcan, v^t el factor de actualización financiera al que descontar los flujos de la prestación en cada uno de los momentos en que ésta resulte abonada por la compañía, y por último Z_t, que es la variable aleatoria que representa el valor actualizado de los flujos a abonar por la aseguradora, es decir, representa el valor actualizado de las prestaciones, consideradas en este caso de cuantía unitaria (Nieto, U y Vegas, J (1993)).

Por lo tanto $Z_t = b_t\, v^t$

$$\begin{aligned}
&b_t = 1 \quad t \geq 0\\
&v_t = v^t \quad t \geq 0\\
&Z = v^{T_x} \quad T_x \geq 0
\end{aligned}$$

Esta definición del seguro vida entera proporciona una triple idea, según indica Bowers en su libro "Actuarial Mathematics" (1997): por una parte la variable aleatoria vida residual representa una variable no negativa, luego por tanto Z sólo podrá proporcionar valores no negativos; por otra parte para un valor de b_t donde t tome el valor 0, el valor que tome v^t es irrelevante; y la última idea que se obtiene es que a no ser que se especifique lo contrario se va a trabajar con un tipo de interés técnico constante.

Para el caso de prima única y aplicando el principio de equivalencia actuarial anteriormente definido mediante los dos subprocesos que lo forman se obtiene la esperanza matemática de la variable aleatoria Resultado:

$$A_x = E\left[R\right] = \Pi_x = \int_0^{\infty} v^t g_x(t)dt = \int_0^{\infty} v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}dt \qquad (9)$$

<u>Establecimiento para un seguro de rentas vitalicia, con pago periódico de primas durante los n primeros años de vigencia de la póliza.</u>

Un seguro de rentas de supervivencia se caracteriza por los pagos periódicos que realiza la compañía aseguradora al asegurado mientras éste se encuentre vivo, partiendo de una edad inicial, la edad actuarial x. Para tener derecho a estas cuantías, el asegurado ha de abonar a la compañía el importe de las primas, bien periódicas o una prima única. Luego esta modalidad de seguro con cobertura de supervivencia depende de la variable aleatoria T_x (tiempo de vida hasta el fallecimiento del asegurado).

Las rentas continuas son aquellas en las que los períodos de maduración son infinitesimales, y la cuantía del término anual unitario se reparte en infinitas partes que vencen en sucesivos instantes. Sea $\overline{V}_x$ la variable aleatoria que representa el valor actual de la renta, cuyos valores posibles son los valores actuales de una renta financiera cierta, continua y unitaria, cuya duración es igual al valor en años que tome la variable aleatoria vida residual, T_x. (Nieto, U y Vegas, J (1993)).

$$\overline{V}_x = f(T_x) = \overline{a}_{T_x;i}$$

La esperanza matemática del valor actualizado de la renta financiera continua coincide con el valor actual actuarial de la renta:

$$E\left[\overline{V}_x\right] = \overline{a}_x = \int_0^{\omega-x} \overline{a}_{t;i}\ g_x(t)\ dt = \int_0^{\omega-x} \overline{a}_{t;i}\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

Integrando por partes la expresión anterior (Gil Fana, Heras y Vilar Zanón, (1999)), se llega a la expresión siguiente del valor actual actuarial de una renta unitaria que depende de la variable aleatoria vida residual, siendo ${}_t E_x$ el llamado factor de actualización actuarial.

$$\overline{a}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x\ v^t dt = \int_0^{\omega-x} {}_t E_x\ dt \qquad (10)$$

APENDICE 3

Las leyes de Supervivencia

La parte de la estadística actuarial vida que se encarga de estudiar la supervivencia humana es la que se conoce con el nombre de Biometría. Los modelos biométricos tienen como variable la edad de fallecimiento X.

Las leyes de supervivencia son modelos de comportamiento de las diferentes funciones biométricas, del tanto instantáneo, de las probabilidades de fallecimiento y de supervivencia así como de la denominada función cohorte, entre otras (Ayuso et al, (2007)). El interés por establecer estos modelos de supervivencia es doble, tal como indica Ayuso M. et al, (2007). Por un lado un interés desde el punto de vista de la metodología, ya que la aplicación de ciertas hipótesis sobre el comportamiento de los fenómenos biológicos acaban por determinar una determinada forma de función para varias funciones biométricas. Y por otro lado el interés es eminentemente práctico, ya que si se consigue una forma funcional para la función de supervivencia que dependa de pocos parámetros, el resultado obtenido también dependerá solamente de esos pocos parámetros.

A modo de resumen se muestran unas tablas donde se recogen, para cada una de las cuatro leyes de supervivencia empleadas en esta tesis en los capítulos cuarto y quinto, lo siguientes datos:

- Función cohorte
- Probabilidad anual de fallecimiento y supervivencia
- Tanto instantáneo
- Función de supervivencia de la edad de fallecimiento
- Función de distribución de la edad de fallecimiento
- Función de densidad de la vida residual.

TABLA 1 APENDICE 3: Primera ley de Dormoy

1ª LEY DE DORMOY	**Formulación**
Función cohorte	$l_x = l_0 S^x$
Probabilidad anual de supervivencia	$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x S}{l_x} = S$
Probabilidad anual de fallecimiento	$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_x S}{l_x} = 1 - S$
Tanto instantáneo de Mortalidad	$\mu_x = -\text{Ln}\, S$
Función Distribución Variable "Edad de Fallecimiento"	$F(x) = 1 - S(x) = 1 - S^x$
Función Supervivencia Variable "Edad de fallecimiento"	$S(x) = \frac{l_x}{l_0} = \frac{l_0 S^x}{l_0} = S^x$
Función densidad variable T_x	$g_x(t) = -\text{Ln}S\, S^t$

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 2 APENDICE 3: Segunda ley de Dormoy

2ª LEY DE DORMOY	**Formulación**
Función cohorte	$l_x = l_0 S_1^x S_2^{x^2}$
Probabilidad anual de supervivencia	$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_0 S_1^{x+1} S_2^{(x+1)^2}}{l_0 S_1^x S_2^{x^2}} = S_1 S_2^{2x+1}$
Probabilidad anual de fallecimiento	$q_x = 1 - S_1 S_2^{2x+1}$
Tanto instantáneo de Mortalidad	$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} = -2x\text{Ln}\, S_2 - \text{Ln}\, S_1$
Función Distribución Variable "Edad de Fallecimiento"	$F(x) = 1 - S(x) = 1 - S_1^x S_2^{x^2}$
Función Supervivencia Variable "Edad de fallecimiento"	$S(x) = S_1^x S_2^{x^2}$
Función densidad variable T_x	$g_x(t) = -\left(2(x+t)\text{Ln}S_2 + \text{Ln}S_1\right)\left(S_1 S_2^{2x+t}\right)^t$

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 3 APENDICE 3: Ley de Gomperzt

LEY DE GOMPERTZ	**Formulación**
Función cohorte	$l_x = \frac{l_0}{p} p^{C^x} = l_0\, g^{C^x - 1}$
Probabilidad temporal supervivencia	${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_0\, g^{C^{x+t}-1}}{l_0\, g^{C^x - 1}} = g^{C^{x+t}-C^x}$
Probabilidad temporal de fallecimiento	${}_t q_x = 1 - g^{C^{x+t}-C^x}$
Tanto instantáneo de Mortalidad	$\mu(x) = \frac{-l'_x}{l_x} = B C^x$
Función Distribución Variable "Edad de Fallecimiento"	$F(x) = 1 - S(x) = 1 - g^{C^x - 1}$
Función Supervivencia Variable "Edad de fallecimiento"	$S(x) = \frac{l_x}{l_0} = g^{C^x - 1}$
Función densidad variable T_x	$g_x(t) = -\mathrm{Ln}\, p\, \mathrm{Ln}\, C\, C^{x+t}\, g^{C^{x+t}-C^x}$

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 4 APENDICE 3: Ley de Makeham

LEY DE MAKEHAM	**Formulación**
Función cohorte	$l_x = \frac{l_0}{p} S^x p^{C^x} = l_0\, S^x\, g^{C^x - 1}$
Probabilidad temporal supervivencia	${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_0\, S^{x+t}\, g^{C^{x+t}-1}}{l_0\, S^x\, g^{C^x - 1}} = S^t\, g^{C^{x+t}-1}$
Probabilidad temporal de fallecimiento	${}_t q_x = 1 - S^t\, g^{C^{x+t}-1}$
Tanto instantáneo de Mortalidad	$\mu_x = \frac{-l'_x}{l_x} = -\mathrm{Ln}\, S - \mathrm{Ln}\, g\, \mathrm{Ln}\, C\, C^x$
Función Distribución Variable "Edad de Fallecimiento"	$F(x) = 1 - S(x) = 1 - S^x\, g^{C^x - 1}$
Función Supervivencia Variable "Edad de fallecimiento"	$S(x) = S^x\, g^{C^x - 1}$
Función densidad variable T_x	$g_x(t) = (S^t\, g^{C^{x+t}-1})\left(-\mathrm{Ln}\, S - \mathrm{Ln}\, g\, \mathrm{Ln}\, C\, C^{x+t}\right)$

Fuente: Elaboración propia.

APENDICE 4

Cálculo de la prima única de riesgo para un seguro con cobertura de fallecimiento (vida entera), mediante las leyes de supervivencia segunda de Dormoy, Gompertz y Makeham.

- Cálculo de la prima única de riesgo mediante la ley de supervivencia “Segunda ley de Dormoy”.

Para la segunda ley de Dormoy, la función de supervivencia de la edad de fallecimiento tiene esta expresión:

$S(x) = S_1^x \, S_2^{x^2}$, siendo S_1 y S_2 dos parámetros menores que la unidad.

Se va a calcular la prima única de riesgo a partir de la función de supervivencia de la edad del asegurado.

$$P = 1 - \frac{1}{S(x)} \int_0^1 (S\left(x + \frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v} \right) dz = 1 - \int_0^1 S_x \left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v} \right) dz \tag{11}$$

$$S_x \left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v} \right) = \frac{S\left(x + \frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v} \right)}{S(x)} = \frac{S_1^{x+\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}} \, S_2^{\left(x+\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v} \right)^2}}{S_1^x \, S_2^{x^2}}$$

$$P = 1 - \int_0^1 S_x \left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v} \right) dz = 1 - \int_0^1 \left(\frac{S_1^{x+\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}} \, S_2^{\left(x+\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v} \right)^2}}{S_1^x \, S_2^{x^2}} \right) dz$$

Aplicando el cambio de variable establecido en el epígrafe 4.1, la integral se resuelve de esta manera:

$$-\int_0^\infty \frac{S_1^{x+1} \, S_2^{(x+t)^2}}{S_1^x \, S_2^{x^2}} v^t \,\mathrm{Ln}\, v \, dt = -\mathrm{Ln}\, v \int_0^\infty S_1^t \, S_2^{t^2+2xt} \, v^t \, dt = -\mathrm{Ln}\, v \int_0^\infty \left(S_1 \, v \; S_2^{2x} \right)^t \, S_2^{t^2} \, dt$$

Con ayuda del programa Maple y llamando $a=\left(S_1\, v\, S_2^{2x}\right)$ y $b=S_2$ se consigue una integral de la forma $\int_0^{\infty} a^t\, b^{t^2}\, dt$, con solución:

$$\int_0^{\infty} a^t\, b^{t^2}\, dt=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x\,\mathrm{Ln}\,a}\ b^{2x}-1}{\mathrm{Ln}\,a+2\,\mathrm{Ln}\,b}=-\frac{1}{\mathrm{Ln}\ a+2\,\mathrm{Ln}\,b}$$

Por lo tanto la solución final de la integral arriba indicada es:

$$-\mathrm{Ln}v\left(\frac{-1}{\mathrm{Ln}\,(S_1\, v\, S_2^{2x})+2\mathrm{Ln}\,S_2}\right)=\frac{\mathrm{Ln}v}{\mathrm{Ln}\,S_1+\mathrm{Ln}v+2x\,\mathrm{Ln}S_2+2\,\mathrm{Ln}S_2}$$

Y la expresión de la prima única de riesgo:

$$P=1-\frac{\mathrm{Ln}\,v}{\mathrm{Ln}\,S_1+\mathrm{Ln}\,v+2x\,\mathrm{Ln}S_2+2\,\mathrm{Ln}\,S_2}=\frac{\mathrm{Ln}\,S_1+(2x+2)\,\mathrm{Ln}\,S_2}{\mathrm{Ln}\,S_1+\mathrm{Ln}\,v+(2x+2)\,\mathrm{Ln}\,S_2} \tag{12}$$

- Cálculo de la prima única de riesgo mediante la ley de Supervivencia de Gompertz.

Del mismo modo que se ha hecho con las anteriores leyes de supervivencia es preciso, en primer lugar, indicar la expresión que toma la función de supervivencia de la variable edad del asegurado con esta ley.

$S(x)=g^{C^x-1}$, donde g es un parámetro positivo pero menor que 1, y C es otro parámetro pero mayor que la unidad.

$$S_x(t)=\frac{S\left(x+t\right)}{S(x)}=\frac{g^{C^{x+t}-1}}{g^{C^x-1}}=g^{C^{x+t}-1-C^x+1}=g^{C^{x+t}-C^x}=g^{C^x\left(C^t-1\right)}$$

$$P=1-\int_0^1 S_x\left(\frac{\mathrm{Lnz}}{\mathrm{Lnv}}\right)dz=1-\int_0^1 g^{C^x\left(C^{\frac{\mathrm{Lnz}}{\mathrm{nv}}}-1\right)}\,dz$$

Aplicando las expresiones obtenidas en el capítulo cuarto, (4.1.1) y (4.1.2), el valor de la integral se muestra a continuación:

$$-\int_0^\infty g^{C^x\left(C^t-1\right)}\, v^t \,\mathrm{Ln}\, v\, dt = -\mathrm{Ln}\, v \int_0^\infty \left(g^{C^{x+t}-C^x}\right) v^t\, dt =$$

$$= -\mathrm{Ln}\, v \int_0^\infty \left(\frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^x}}\right) v^t\, dt = -\mathrm{Ln}\, v \int_0^\infty \left(\frac{\left(g^{\left(C^x\right)^{C^t}}\right)}{g^{C^x}}\right) v^t\, dt$$

Es necesario hacer un cambio de variable en la expresión anterior para poder resolver la integral. Así, $d = g^{C^x}$, de modo que la integral toma la siguiente forma:

$$-\mathrm{Ln}\, v \int_0^\infty \left(\frac{\left(g^{\left(C^x\right)^{C^t}}\right)}{g^{C^x}}\right) v^t\, dt = -\frac{\mathrm{Ln}\, v}{d}\int_0^\infty d^{C^t}\, v^t\, dt = -\frac{\mathrm{Ln}\, v}{d}\int_0^\infty \left(d^C\, v\right)^t dt =$$

$$= -\frac{\mathrm{Ln}\, v}{d}\left(\frac{\left(d^C\, v\right)^t}{\mathrm{Ln}\left(d^C\, v\right)}\right)_0^\infty = \frac{\mathrm{Ln}\, v}{d\left(C\,\mathrm{Ln}\, d + \mathrm{Ln}\, v\right)}$$

Deshaciendo el cambio de variable anterior se obtiene:

$$\frac{\mathrm{Ln}\, v}{g^{C^x}\left(C\,\mathrm{Ln}\, g^{C^x} + \mathrm{Ln}\, v\right)} = \frac{\mathrm{Ln}\, v}{g^{C^x}\left(C^{x+1}\,\mathrm{Ln}\, g + \mathrm{Ln}\, v\right)} \tag{13}$$

La expresión de la Prima única de riesgo será la que se obtenga de restar a 1 la ecuación (13).

$$P = 1 - \frac{\mathrm{Ln}\, v}{g^{C^x}\left(C^{x+1}\,\mathrm{Ln}\, g + \mathrm{Ln}\, v\right)} = \frac{g^{C^x}\left(C^{x+1}\,\mathrm{Ln}\, g + \mathrm{Ln}\, v\right) - \mathrm{Ln}\, v}{g^{C^x}\left(C^{x+1}\,\mathrm{Ln}\, g + \mathrm{Ln}\, v\right)} \tag{14}$$

- Cálculo de la prima única de riesgo mediante la ley de Supervivencia Makeham.

La función de supervivencia de la edad de fallecimiento, para esta ley, será casi igual que la anterior con Gompertz. La única diferencia es que en esta ley se incorpora un nuevo término a la ley de Gompertz, que consiste en multiplicar la ley anterior por S^x.

$S(x) = S^x\, g^{C^x - 1}$, donde g y S son parámetros menores que la unidad, mientras que C es mayor que 1.

$$P = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\text{Ln}\, z}{\text{Ln}\, v}\right)dz$$

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{S^{x+t}\, g^{C^{x+t}-1}}{S^x\, g^{C^x-1}} = S^{x+t-x}\, g^{C^{x+t}-1-C^x+1} = S^t\, g^{C^x\left(C^t-1\right)}$$

$$P = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\text{Ln}\, z}{\text{Ln}\, v}\right)dz = 1 - \int_0^1 S^{\frac{\text{Ln}\, z}{\text{Ln}\, v}}\, g^{C^x\left(C^{\frac{\text{Ln}\, z}{\text{Ln}\, v}}-1\right)}\, dz$$

Aplicando el cambio de variable establecido en el epígrafe 4.1:

$$-\int_0^\infty S^t\, g^{C^x\left(C^t-1\right)}\; v^t\, \text{Ln}v\, dt = -\text{Ln}v \int_0^\infty S^t\, g^{C^x\left(C^t-1\right)}\, v^t\, dt = -\text{Ln}v \int_0^\infty S^t\, \frac{g^{C^x\, C^t}}{g^{C^x}}\, v^t\, dt =$$

$$= -\text{Ln}v \int_0^\infty S^t\, \frac{\left(g^{C^x}\right)^{C^t}}{g^{C^x}}\, v^t\, dt$$

Haciendo el mismo cambio de variable que se ha hecho con la ley de Gompertz, la expresión de la integral adopta la siguiente forma:

$$d = g^{C^x}$$

$$-\text{Ln}\, v \int_0^\infty S^t\, \frac{\left(g^{C^x}\right)^{C^t}}{g^{C^x}}\, v^t\, dt = -\text{Ln}\, v \int_0^\infty S^t\, v^t\, \frac{d^{C^t}}{d}\, dt = -\frac{\text{Ln}\, v}{d} \int_0^\infty \left(S\, v\, d^C\right)^t dt =$$

$$= -\frac{\text{Ln}\, v}{d}\left(\frac{\left(S\, v\, d^C\right)^t}{\text{Ln}\left(S\, v\, d^C\right)}\right)_0^\infty = \frac{\text{Ln}\, v}{d\left(\text{Ln}\, S + \text{Ln}\, v + C\, \text{Ln}\, d\right)}$$

Una vez que se tiene resuelta la integral, y volviendo a deshacer el cambio de variable hecho anteriormente, la integral tiene la siguiente resolución:

$$\frac{\mathrm{Ln}\,v}{d\left(\mathrm{Ln}\,S+\mathrm{Ln}\,v+C\,\mathrm{Ln}d\right)}=\frac{\mathrm{Ln}v}{g^{C^x}\left(\mathrm{Ln}\,S+\mathrm{Ln}\,v+C\mathrm{Ln}g^{C^x}\right)}=\frac{\mathrm{Ln}v}{g^{C^x}\left(\mathrm{Ln}S+\mathrm{Ln}v+C^{x+1}\,\mathrm{Ln}g\right)}$$

La expresión final de la prima única de riesgo:

$$P=1-\frac{\mathrm{Ln}\,v}{g^{C^x}\left(\mathrm{Ln}\,S+\mathrm{Ln}\,v+C^{x+1}\,\mathrm{Ln}\,g\right)}=\frac{g^{C^x}\left(\mathrm{Ln}\,S+\mathrm{Ln}\,v+C^{x+1}\,\mathrm{Ln}\,g\right)-\mathrm{Ln}\,v}{g^{C^x}\left(\mathrm{Ln}\,S+\mathrm{Ln}\,v+C^{x+1}\,\mathrm{Ln}\,g\right)} \qquad (15)$$

Cálculo de la prima única de ries go para un seguro con cobertura de supervivencia (seguro de rentas), mediante las leyes de supervivencia segunda de Dormoy, Gompertz y Makeham

- Cálculo de la prima única de riesgo mediante la ley de supervivencia "Segunda ley de Dormoy".

La expresión matemática de la función de supervivencia de la edad de fallecimiento es la siguiente (apéndice 3):

$$S(x) = S_1^x S_2^{x^2}$$

$$S_1 < 1$$
$$S_2 < 1$$

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)}dz$$

Sustituyendo queda:

$$\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} = \frac{S_1^{x+\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2}}{S_1^x S_2^{x^2}} = S_1^{\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{2x\frac{Lnz}{Lnv}+\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2}$$

Aplicándose el cambio de variable establecido anteriormente ($v^t = z$), queda:

$$\frac{S\left(x+\frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} = S_1^{\frac{Lnz}{Lnv}} S_2^{2x\frac{Lnz}{Lnv}+\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)^2} = S_1^t S_2^{2xt} S_2^{t^2}$$

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_\infty^0 S_1^t S_2^{2xt} S_2^{t^2} v^t Lnv\,dt = \int_0^\infty \left(S_1 S_2^{2x} v\right)^t S_2^{t^2} dt$$

Con ayuda del programa Maple y llamando $a = \left(S_1\, v\, S_2^{2x}\right)$ y $b = S_2$ se consigue una integral de la forma $\int_0^\infty a^t\, b^{t^2}\, dt$, con solución:

$$\int_0^{\infty} a^t\, b^{t^2}\, dt = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{xLna}\ b^{2x}-1}{Lna+2Lnb} = -\frac{1}{Ln\,a+2Lnb}$$

La expresión de la prima única de riesgo, por lo tanto, es:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\infty}\left(S_1 S_2^{\,2x} v\right)^t S_2^{\,t^2} dt = -\frac{1}{Ln\left(S_1 S_2^{\,2x} v\right)+2LnS_2} = \\ &= \frac{-1}{LnS_1 + 2xLnS_2 + Lnv + 2LnS_2} = \\ &= \frac{-1}{LnS_1 + \left(2x+2\right)\, LnS_2 + Lnv} \end{aligned} \tag{16}$$

- Cálculo de la prima única de riesgo mediante la ley de Supervivencia de Gompertz.

La expresión matemática de la función de supervivencia de la edad de fallecimiento es la siguiente (apéndice 3):

$S(x) = g^{C^x-1}$, donde g es un parámetro positivo pero menor que 1, y C es otro parámetro pero mayor que la unidad.

$$\frac{S\left(x+\dfrac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} = \frac{g^{C^{x+\frac{Lnz}{Lnv}}-1}}{g^{C^x-1}} = \frac{g^{C^{x+\frac{Lnz}{Lnv}}}}{g^{C^x}}$$

$$S_x(t) = \frac{g^{C^{x+t}-1}}{g^{C^x-1}} = \frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^x}}$$

Aplicándose el cambio de variable establecido anteriormente ($v^t = z$), queda:

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_{\infty}^{0}\left(\frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^x}}\right)v^t Lnvdt = \frac{1}{g^{C^x}}\int_0^{\infty}\left(g^{C^x}\right)^{C^t} v^t dt$$

Con el cambio de variable $d = g^{C^x}$, se obtiene:

$$P = \frac{1}{d}\int_0^{\infty}\left(d^C v\right)^t dt = \frac{1}{d}\left[\frac{\left(d^C v\right)^t}{Ln\left(d^C v\right)}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{d}\frac{1}{Lnd^C + Lnv} \qquad (17)$$

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene:

$$P = \frac{-1}{g^{C^x}\left(CLng^{C^x} + Lnv\right)} = \frac{-1}{g^{C^x}\left(C^{x+1}Lng + Lnv\right)} > 0 \qquad (18)$$

Esta prima es mayor que cero puesto que $v < 1$, luego $Lnv < 0$, y $g < 1$, luego $Lng < 0$.

- Cálculo de la prima única de riesgo mediante la ley de Supervivencia Makeham.

La expresión matemática de la función de supervivencia de la edad de fallecimiento es la siguiente (apéndice 3):

$S(x) = S^x g^{C^x - 1}$, donde g y S son parámetros menores que la unidad, mientras que C es mayor que 1.

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)dz$$

Se realiza el mismo cambio de variable que se ha hecho con las anteriores leyes, y en base a esto se resuelve la integral.

$$S_x(t) = \frac{S^{x+t}g^{C^{x+t}}}{S^x g^{C^x}} S^t g^{C^{x+t} - C^x} = S^t g^{C^x\left(C^t - 1\right)}$$

$$\frac{S\left(x + \frac{Lnz}{Lnv}\right)}{S(x)} = \frac{S^{x+\frac{Lnz}{Lnv}} g^{C^{x+\frac{Lnz}{Lnv}} - 1}}{S^x g^{C^x - 1}} = \frac{S^{x+\frac{Lnz}{Lnv}} g^{C^{x+\frac{Lnz}{Lnv}}}}{S^x g^{C^x}}$$

$$P = -\frac{1}{Lnv}\int_{\infty}^{0} S^t g^{C^x\left(C^t-1\right)} v^t Lnv dt = \int_0^{\infty} S^t \frac{g^{C^{x+t}}}{g^{C^x}} v^t dt =$$

$$= \frac{1}{g^{C^x}}\int_0^{\infty} S^t \left(g^{C^x}\right)^{C^t} v^t dt$$

Haciendo el mismo cambio de variable que se ha hecho con la ley de Gompertz, la expresión de la integral adopta la siguiente forma:

$$d = g^{C^x}$$

$$P = \frac{1}{d}\int_0^{\infty} S^t \left(d^C v\right)^t dt = \frac{1}{d}\int_0^{\infty} \left(S\, d^C\, v\right)^t dt = \frac{1}{d}\left(\frac{\left(Sd^C v\right)^t}{Ln\left(Sd^C v\right)}\right)_0^{\infty} = -\frac{1}{d}\frac{1}{Ln(Sd^C v)} \qquad (19)$$

Una vez que se tiene resuelta la integral, y volviendo a deshacer el cambio de variable hecho anteriormente, la expresión de la prima única de riesgo es:

$$P = \frac{-1}{g^{C^x}\left(LnS + CLng^{C^x} + Lnv\right)} = \frac{-1}{g^{C^x}\left(LnS + C^{x+1}Lng + Lnv\right)} \qquad (20)$$

BIBLIOGRAFÍA

- Aguilar, P. (2008), *Métodos Actuariales de primas de fianzas.* Revista Actuari@.
- Alonso, J., Berggrun, L. (2008), *Introducción al análisis de riesgo financiero.* Colección Discernir. Serie Ciencias administrativas y Económicas. Universidad Icesi.
- Alonso, P., Albarrán, I. (2008), *Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: técnicas estadísticas avanzadas Montecarlo y Bootstrapping.* Instituto de Ciencias del Seguro. Fundación Mapfre.
- Andrew, C. (2000), *Métodos de Evaluación del riesgo para portfolios de Inversión*. Banco Central de Chile. Documento de trabajo Nº 67.
- Asmussen, S., Moller, J. (2003), *Risks comparisons of Premium rules: optimality and a life insurance study*, Insurance: Mathematics & Economics, vol. 32. July, p. 331-334.
- Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Pérez-Marín, AM., Rojo, JL. (2007), *Estadística Actuarial Vida*. Publicaciones y Ediciones UB.
- Australian G-20 Secretariat Background Note (2006), *Demographic change.* Melbourne 18-19 November.
- Aragonés, JR., Blanco, C. (2000), *Valor en Riesgo*. Editorial Pirámide.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, JM., Heath, D. (1999), *Coherent measures of risk*. Mathematical Finance, Vol.9, Jul, p. 203-228.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, JM., Heath, D. (1997), *Thinking coherently*. Risk, vol.10, Nov, p. 68-71.
- Artzner, P., Delbaen, F. (1999), *Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance.* North American Actuarial Journal, vol.3, nº 2, p. 11-15.
- Balbás, A., Garrido, J., Mayoral, S. (2009), *Properties of Distortion Risk Measure*, Methodology Computer Apple Probab, p. 385-399.
- Barbancho, AG. (1988), *Estadística teórica básica. Probabilidad y modelos probabilísticos*, Ed. Ariel Economía. Barcelona.
- Booth, P., Chadburn, R., Haberman, S., Khorasanee, Z. (2005), *Modern Actuarial Theory and Practice*, Ed. Chapman & Hall/ CRC.

- Bowers, JR., Newton, L., Gerber, H., Jones, D. (1997), *Actuarial Mathematics.* The Society of Actuaries. Illinois.
- Burgos Román, J. (2009), *Cálculo de una variable real : cálculo diferencial e integral, sucesiones y series, ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ed. García-Maroto.
- Braxton, M. (1987), *Elements of Statistics for the Life and Social Sciences*. Springer-Verlag.
- Bulmann, H. (1996), *Mathematical Methods in risk theory*. Ed. Springer. Nueva York.
- Bulmann, H. (1980), *An Economic premium principle,* Astin Bulletin vol.1, nº1, p. 52-60.
- Campbell, R. (1980), *The demand for life insurance: an application of the Economics of Uncertainty,* The Journal of Finance, vol.35, Dec, p. 1155-1172.
- Carr, D. (2007), *To Insure Longevity Risk or not: That is the Question,*. Life & Health, nº6, August.
- Castelo Matrán, J., Guardiola Lozano, A. (1992), *Diccionario Mapfre de Seguros.* Ed. Mapfre.
- César Alonso, J., Arcos, M. (2006), *Var: Evaluación del desempeño de diferentes metodologías para siete países latinoamericanos.* Borradores de Economía y Finanzas. Editorial: Universidad ICESI.
- Chernobai, A., Rachev, S., Fabozzi, F. (2007), *Operational Risk*, Ed. Wiley Finance.
- Conniffe, D. (2008), *Generalised Means of Simple Utility Functions with Risk Aversion,* The Economic and Social Review, vol.39, nº 1, Apr, p. 1-12.
- Denneberg, D. (1994), *Non-Additive Measure and Integral*, Universitat Bremen. Kluwer Academic Publishers.
- Denneberg, D., Cohen, M. (2002), *General Introduction to this special issue on Choquet integral and applications*. Statistical Papers. Berlin, vol.42, Jan, p. 23-36.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., Laeven, R. (2006), *Risk measurement with the equivalent utility principle*", Statistics and Decisions, vol 24, Issue 1, p. 1-25.

- Denuit, D. (1999), *The Exponential Premium calculation principle revisited*, Astin Bulletin International Actuarial Association, vol. 29. Nov, p. 215-226.
- Denuit, D., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. (2005), *Actuarial Theory for Dependent risks: measures, orders and models,* John Wiley & Sons.
- Dhaene, J., Laeven, R.,Vanduffel, S. (2008), "*Can a Coherent risk Measure be too subaditive?*, The Journal of risk and Insurance, vol.75, nº2, Jun, p. 365-386.
- Directiva 2009/138/CE de Parlamento Europeo y del Consejo, de 25/11/2009.
- Down, K. (1998), *Beyond Value at risk*. Wiley.
- Díaz Cruz, E. (2006), *Teoría del Riesgo. Riesgo Actuarial y riesgo financiero.* ECOE Ediciones.
- Down, K. (1992), *Measuring Market Risk*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Eisenhauer, J., Halek, M. (1999), "Prudence*, risk aversion and the demand for life insurance*". Applied Economics Letters. Nº6. p. 239-242.
- Erdman, D., Major, S., Rioux, J. (2010), "*Evaluation of parameter risk via first-order approximation of distortion risk measures"*. The Journal Operational Risk. vol. 5, Nº.1. Spring. p. 29-46.
- Esteban, L. (2008), "*Yo soy actuario y solvencia II*". Revista Actuarios Nº 27. Junio. p. 43-47.
- European Commission. Internal Market and Services DG. Insurance and pensions. Brussels., (2010), *QIS5 Technical Specifications (Working Document of the Commission services).* https://www.ceiops.eu.
- Ferruz, L., Portillo, Mª.P., Sarto, JL. (2001), *Dirección financiera del riesgo de interés.* Editorial Pirámide.
- Fischer, T. (2007), "*A law of large numbers approach to valuation in life insurance*". Insurance: Mathematics & Economics. vol. 40, Jan. p. 35.
- Flam, S. (2009), "*Risk Premium and non-smooth utility*". The Journal of Risk. V.11. Nº3. Apr. p. 87-99.
- Garman, M., Blanco, C. (1998), "*Nuevos avances en la metodología de valor en riesgo. Conceptos de Vardelta y Varbeta"*. Revista Análisis Financiero, Nº 75. p. 6-8.
- Gelles, G., Mitchell, D. (1999), "*Broadly decreasing risk aversion*". Management Science. vol 45. Oct .p.1432-1439.

- Gerber, H. (1979), *An introduction to mathematical risk theory*. Huebner Foundation.
- Gerber, H. (1990), *Life Insurance Mathematics*. Swiss Association of Actuaries.
- Gerber, U., Deprez, O. (1984), "*On convex principles of Premium calculation*". Insurance: Mathematics & Economics. vol. 4. Nov. p. 179-189.
- Gerber, H., Parfumi, G. (1998),"*Utility Functions: from risk theory to finance*". North American Actuarial Journal. vol.2, July. p.74-91.
- Gil Fana, J.A., Heras, A., y Vilar Zanón, J.L. (1999), *Matemática de los Seguros de Vida*. Editorial MAPFRE.
- Gómez Deniz, E., Sarabia, JM. (2008), *Teoría de la Credibilidad. Desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales.* Fundación MAPFRE.
- Gómez-Déniz, E., Hernández-Bastida, A., Vázquez-Pol, FJ. (1999), "*The Esscher Premium principle in risk theory: a Bayesian sensivity study*". Insurance: Mathematics & Economics. vol. 25, Issue 3. December. p. 387-395.
- Gómez-Déniz, E. (1999), "*Un análisis de sensibilidad delproceso de tarificación en los seguros generales".* Estudios de Economía Aplicada. Nº 9. p. 19-34.
- Gómez-Déniz, E., León, M. (2005), "*Un modelo de tarificación Bonus-Malus bajo el principio Esscher con tarifas más competitivas*". Estudios de Economía Aplicada. vol .23-1. p. 79-91.
- Gómez Rojas, F. (2003), "*Algunas ideas sobre un sistema de gestión de riesgos técnicos y de mercado en una compañía de seguros de vida*". Revista Actuarios Nº21. Abril/Mayo .p. 26-33.
- González de Frutos, P. (2002), "*Los seguros de vida: una pequeña historia*". Perspectivas del sistema financiero. Nº74. p. 1-12.
- Goovaerts, MJ., Dhaene, J. (1998), "On *the characterization of Wang's Premium principles*". In Proceedings of the 26th International Congress of Actuaries, Birmingham. vol.4. p 121-134.
- Goovaerts, MJ., De Vylder, F. (1984), *Insurance Premiums. Theroy and Applications*. North-Holland. Amsterdam.

- Guardiola, A. (2001), *Manual de Introducción al seguro (2ª edición).* Editorial MAPFRE.
- Haberman, S., Hatzopoulos, A. (2009), "A *parameterized approach to modeling and forecasting mortality*". Insurance: Mathematics & Economics. vol.44. Mar. p. 103-123.
- Haberman, S., Pitacco, E. (1999), *Actuarial Models for disability Insurance*. Chapman- Hall.
- Hammitt, J., Eeckhoudt, L. (2004), "*Does Risk aversion increase the value of mortality risk?*. Journal of Environmental Economics Management. vol 47. Jan. p. 13.
- Heilmann, W. (1989), "*Decision theoretic foundations of credibility theory*". Insurance: Mathematics & Economics. vol. 8. Dec. p. 77-95.
- Heilpern, S. (2003), "*A rank-dependent generalization of zero utility principle*". Insurance: Mathematics & Economics. vol. 33. Jan. p. 67-73.
- Hernández, D. (2002), "*Los seguros en unidades de cuenta como alternativa al seguro clásico*". Revista Actuarios, Nº20. Junio.
- Hoedemakers, T., Goovaerts, M. (2005), "*Approximations for life annuity contracts in a stochastic financial environment*". Insurance: Mathematics & Economics. vol. 37. October. p. 239-269.
- Hurlimann, W. (2008), "*Distortion Risk measures and Economic capital*". North American Actuarial Journal. vol.8. Jan. p. 86-95.
- Jones, B., Ricardas, Z. (2007), "*Risk Measures, distortion parameters and their empirical estimation*". Insurance: Mathematics & Economics. vol.41. September. p. 279-297.
- Jorion, P. (1997), *Value at Risk.* Chicago Irwin.
- Kaas, R., Goovaerts, M. (2008), *Modern actuarial risk theory*. Kluwer Academic Publishers.
- Kaiser, T., Brazauskas, V. (2006), "*Interval estimation of actuarial risk measures*". North American Actuarial Journal. vol.10. Oct. p. 249-268.
- Kaltwasser, P., Le Moine, P. (2007), "*Modeles de risques et solvabilite en assurance vie*". Bulletin francais d'actuariat". vol. 7, nº14. Juillet-Decembre. p.25-74.

- Kannisto, V. (1996), "The *advancing frontier of survival: life tables for old age"*. Odense University Press.
- Kling, B., Wolthuis, H. (1992), "*Ordering of Risks in Life Insurance*". Insurance, Mathematics & Economics. vol. 11. Aug. p. 139-153.
- Kremer, E. (1986), "*On robust premium principles*". Insurance: Mathematics & Economics. vol. 5. Oct. p. 271-275.
- Laeven, R., Goovaerts, M. (2008), "*Premium calculation and Insurance Pricing*". Artículo incluído en el libro "*Enclyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment"*. Ed: Edward L Melnick.
- Landsman, Z., Sherris, M. (2001), "*Risk measures and insurance premium principles*". Insurance: Mathematics & Economics. vol. 29, Aug. p. 103-115.
- Latorre, L. (1992), *Teoría del Riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora*. Editorial Mapfre.
- Levi, E. (1973), "*Curso de Matemática Financiera y Actuarial*". vol.I. Ed. Bosch.
- Levy, H. (1994), "*Absolute and Relative Risk aversion: an experimental study*". Journal of Risk and Uncertainty. vol.8. p. 289-307.
- Levy, H; Levy, M. (2002), "*Arrow-Pratt risk aversión, risk Premium and decision weights*". Journal of Risk and Uncertainty. vol.25. Nov. p. 265-279.
- Lewis, F. (1989), "*Dependents and the demand for life insurance*". The American Economic Review. vol.79. Jun. p. 452-467.
- Lister, R. (2007), "*Cálculo del Valor en Riesgo*". Revista Actuari@.
- Lynn, J., Hardy, M. (1999), "*A synthesis of risk measures for capital adequacy*". Insurance: Mathematics and Economics. vol.25, Jul. p. 337-347.
- López Cachero, M., López de la Manzanara, B. (1996), *Estadística para actuarios.* Editorial Mapfre.
- Luan, C. (2001), "*Insurance Premium calculations with anticipated utility theory*". Astin Bulletin, vol. 31, nº 1. p. 23-35.
- Mao, H., Carson, J., Ostaszewski, K., Shoucheng, L. (2004), "*Pricing Life Insurance, combining Economic Financial and Actuarial Approaches*". Journal of Insurance Issues. vol.27. p. 134-159.
- Mc Neil, J., Rudiger, F., Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk management*. Princenton Series in Finance.

- Medina, A., Sánchez, JM. (2003), "*Modelos de Supervivencia adecuados para análisis actuariales de mortalidad*". XI Jornadas de Asepuma. Universidad de Oviedo. Sep.
- Mendoza Casas, A. (2006), "*Incidencia de una Pandemia en las provisiones del seguro de vida*". Revista Actuarios Nº 24. Abril/Mayo. p. 45-48.
- Modigliani, M., Miller, M. (1958), *"The cost of capital, Corporate Finance and the Theory of Investment"*. Ed: The American Economic Review. vol.48, p. 261-297.
- Moreno, R., Gómez Pérez, O., Trigo, E. (2005), *Matemática de los seguros de vida*. Ed. Pirámide.
- Muller, H. (1987), "*Economic Premium principles in insurance and the capital asset pricing model*". University of Zurich. Astin Bulletin. vol.17, Issue 2. Nov.
- Nieto, U., Vegas, J. (1993), *Matemática Actuarial*. Editorial MAPFRE.
- Otero González, J.L. (2005), "*Análisis y Medición del Riesgo Financiero en Carteras de Vida*". Revista Española de Financiación y Contabilidad Nº 127, Oct-Dic. p. 925-950.
- Otero, L., Fernández, S., Ximenez, S. (2001), "*El Value at risk en el ámbito del seguro de vida"*. Actualidad Financiera Año VI, Nº 1, Enero. p. 13-24.
- Panjer, H., Wang, S. (1995), "*Computacional aspect of Sundt`s generalized class*". University of waterloo, Ontario, Canadá. Astin Bulletin. vol.25, Issue 1. May.
- Panjer, H., Willmot, G.E. (1992), *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.
- Panning, W. (1999), "*The strategic uses of value at Risk: long term capital management for property/casualty insurers"*. North America Actuarial Journal. p. 84-105.
- Peña, JI. (2002), *La gestión de riesgos financieros de mercado y de crédito,* Prentice Hall, Financial Times.
- Pérez Díaz, J. (1998), *La demografía y el envejecimiento de las poblaciones*. McGraw-Hill.
- Pitacco, E. (2007), "*Mortality and Longevity: a risk management perspective*". University of Trieste. Invited Lecture at the 1st IAA Life Colloquium Stockolm, June.

- Pozuelo, E. (2007*), Modelización actuarial del valor razonable en las entidades aseguradoras de vida*. Tesis de la Facultad Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense Madrid.
- Pratt, J., Zeckhauser, R. (1987), "*Proper Risk Aversion*". Econometrica. vol.55. Nº 1. Jan. p. 143-154.
- Prieto Pérez, E., Fernandez Plasencia, J. (2000), Tablas *de Mortalidad de la Población Española de 1950 a 1990*. Tabla proyecta del año 2000.
- Reich, A. (1986), "*Properties of Premium Calculation Principles*". Insurance, Mathematics & Economics. vol. 5, Jan. p. 97-102.
- Robine, JM. (2006), "*Human Longevity, individual life duration and the growth of the oldest-old population*". Ed. Springer.
- Rotar, V. (2007), *Actuarial Models, The Mathematics of Insurance.* Ed.Chapman & Hall/CRC.
- Sandell, R. (2003), *El envejecimiento de la población.* Real Instituto Elcano. WP 20.
- Schmidler, D. (1986), "Integral representation without additivity". Proceedings of the American Mathematical Society. vol.97. p. 255-261.
- Schmeidler, D. (1989), "*Probability and Expected Utility without Additivity*". Econometrica. vol. 57, Nº 3. May. p. 571-587.
- Schmidt, K. (1989), "*Positive homogeneity and multiplicativity of premium principles on positive risks*". Insurance: Mathematics&Insurance. Vol. 8, Dec. p. 315-319.
- Scotti, V. (2007), "*Annuities, a private solution to longevity risk*". SwissRe/Sigma, Nº3. Vol. 13. Noviembre.
- Tasche, D. (2000), Risk contributions and performance measurement. [Web]. Munich: Technische Universität München.
- Tibiletti, L. (2006), "*A Shortcut Way of Pricing Default Risk through Zero-Utility Principle*". Journal of Risk and Insurance. vol.73, Jun. p. 303-309.
- Tsanakas, A., Desli, E. (2003), "*Risk measures and Theories of choice under risk*". British Actuarial Journal. July.
- Tse, Y. (2009), *Nonlife Actuarial Models. Theory, Methods and Evaluation*. Ed.Cambridge University Press.

- Van Heerwaarden, L., Kass, R., Goovaerts, M. (1989), "*Properties of the Esscher premium calculation principle*". Insurance, Mathematics & Economics. Vol 8, Dec. p. 261-268.
- Vegas Asensio, J. (2000), "*El riesgo de longevidad en los planes de pensiones*". Anales Instituto Actuarios Españoles Nº 6. p. 119-157.
- Vilar Zanón, JL., Lozano Colomer, C. (2009), *La media geométrica como principio de cálculo de primas.* Anales. 3ª época. Nº 15. Instituto de Actuarios.
- Villalón, J. (1993), *Ejercicios resueltos de matemáticas para las aplicaciones financieras y de seguros.* Ed. Centro de Estudios Ramón Areces.
- Villalón, J. (1991), *Matemática de las Decisiones Financieras y sus aplicaciones. Tomo I: Decisiones de Inversión*. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces.
- Villalón, J. (1997), *Operaciones de Seguros clásicas y modernas*. Ed. Pirámide.
- Viscui, W. (1997), "*Measures of mortality risk"*. Journal of risk and uncertainty. Issue Number 3, vol.14, May. p. 213-233.
- Wang, S. (2000), "*A class of distortion operators for pricing financial and insurance risk*". Journal of risk and insurance. vol. 67. March. p. 15-37.
- Wang, S. (2002), "*A risk measure that goes beyond coherence*". Technical Report, SCOR Reinsurance Co. URL: http://www.actuaries.org.
- Wang, S. (2003), "*Equilibrium pricing transforms: new results using Buhlmann's 1980 economic model*". Astin Bulletin vol. 33, nº 1. p. 57-73.
- Wang, S. (1995), "*Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms*". Insurance, Mathematics & Economics. vol.17, Feb. p. 43-54.
- Wang, S. (1996), "*Ordering of risks under PH-Transforms*". Insurance, Mathematics and Economics. vol.18. Jul. p. 109-114.
- Wang, S. (1994), "*Premium calculation by transforming the layer premium density*". Risk and Insurance Archive. Working Papers, Nº 30.
- Wang, S., Young, VR. (1998), "*Risk-adjusted credibility Premiums using distorted probabilities*". Scandinavian Actuarial Journal. vol. 2. p. 143-165.

- Wang, SS., Young, VR., Panjer, HH. (1997), "*Axiomatic characterization of insurance prices*". Insurance, Mathematics & Economics. vol 21, Nov. p.173-183.
- Weisstein, E. (1996), *Principle of Mathematical Induction*. Oxford University Press.
- Whirch, JL. "*Distortion Risk Measures. Coherence and Stochastic Dominance*". Unpublished Working paper. (http://www.gloriamundi.org).
- Whirch, JL., Hardy, M. (1999), "*A synthesis or risk measures for capital adequacy*". Insurance, Mathematics & Economics. vol.25, Dec. p. 337-347.
- Xie, D. (2000), "*Power Risk Aversion Utility Functions".* Annals of Economics and Finance. vol.1. p. 265-282.
- Young, V. (2003), "*Equity-indexed life insurance: Pricing and reserving using the principle of equivalent utility"*. North American Actuarial Journal. vol 7. Jan. p. 68-87.
- Young, V. (1999), "*Optimal insurance under Wang's premium principle*". Insurance, Mathematics & Economics. vol 25, Mar. p. 109-122.
- Young, V. (2004), "*Premium Principles*". Encyclopedia of actuarial Science. Wiley New York.